OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2018

Gara Interregionale – 19 febbraio

Categoria Senior

1. Pippo va su Marte

Pippo è stato selezionato per il programma spaziale "Mandiamoli su Marte" della TASA (TopoliniA Space Agency) e sta facendo i bagagli. Gli è stato detto che su Marte avrà a disposizione, nella base in costruzione, un mobiletto dove stipare la sua roba, che potrà reggere al massimo un peso di 30 N. Pippo mette nelle valigie 90 N di bagagli. Topolino, venuto a salutarlo prima della partenza, gli fa notare che ha sbagliato a fare i calcoli. Ha ragione? Perché?

Soluzione

Topolino ha ragione. Infatti, dai dati in tabella, l'accelerazione di gravità $\left(g = \frac{G\,M}{R^2}\right)$ vale circa 9.79 m/s^2 sulla Terra e 3.71 m/s^2 su Marte. 90 N di bagagli terrestri equivalgono quindi a 90 · 3.71/9.79 = 34 N di bagagli marziani. Pippo ha sbagliato i conti!

2. Cinematica terrestre

La Terra impiega circa 23 ore e 56 minuti per compiere una rotazione completa attorno al proprio asse (giorno siderale).

a) Con quale velocità tangenziale si muove un punto all'equatore per effetto della rotazione della Terra?
b) Quanto vale l'accelerazione centripeta che agisce su questo punto?
c) Quale forza centripeta agisce su un corpo di massa 1.3 kg all'equatore?
d) Che velocità di rotazione dovrebbe avere la Terra affinché un corpo all'equatore pesi la metà? E quanto durerebbe un giorno siderale se la Terra ruotasse a tale velocità?

Soluzione

a) La lunghezza dell'equatore della Terra è: $C = 2\pi R_T = 6.283 \cdot 6378 \text{ km} \cong 40070\ km$

La velocità tangenziale di un punto all'equatore vale quindi:

$$v = \frac{C}{T} = \frac{40070\ km}{86160 s} = 0.\ 4651\ \frac{km}{s} = 465.1\ \frac{m}{s} = 1674\ \frac{km}{h}$$

b) L'accelerazione centripeta vale:

$$a_C = \frac{v^2}{R} = \frac{(465.1)^2}{6378000} = 33.92 \cdot 10^{-3}\ \frac{m}{s^2}$$

c) La forza centripeta che agisce su un corpo di massa m = 1.3 kg vale:

$$F_C = m \cdot a_C = 44.09 \cdot 10^{-3} \text{ N.}$$

d) Affinché un corpo all'equatore pesi la metà, la forza netta risultante dall'azione concomitante di forza peso e forza centrifuga (opposte di segno) deve essere pari a metà della forza peso:

$$F_g - F_c = \frac{1}{2} F_g$$

da cui si ricava che la forza centrifuga deve valere la metà di quella di gravità:

$$F_c = m\ \frac{v^2}{R} = m\ \frac{4\,\pi^2\,R}{T^2} = \frac{1}{2}\,F_g = \frac{1}{2}\,m\ \frac{G\,M}{R^2}$$

Ricaviamo quindi il periodo di rotazione (giorno siderale) che, in corrispondenza, dovrebbe avere la Terra:

$$T = \sqrt{\frac{8\,\pi^2\,R^3}{G\,M}} = \sqrt{\frac{78.96\ \cdot 2.594\ \cdot 10^{20}}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \cdot 5.97\ \cdot\ 10^{24}}} \cong 7170\ s\ \cong 1h\ 59.5\ m$$

Ad esso corrispondono una velocità tangenziale: $v = \frac{2\,\pi\,R}{T} \cong 5.589\ \frac{km}{s} = 5589\ \frac{m}{s} = 20120\ \frac{km}{h}$

e una velocità angolare: $\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 8.76\ \cdot\ 10^{-4}\ \frac{rad}{s}$

3. Le più luminose di Orione

Le due stelle più luminose della costellazione di Orione, Rigel e Betelgeuse, hanno una magnitudine apparente di m(Rigel) = 0.18 e m(Betelgeuse) = 0.45. Quale delle due stelle ci appare più luminosa? Quale è il rapporto dei flussi che riceviamo sulla Terra? Di quale ulteriore informazione abbiamo bisogno per stabilire quale delle due stelle è intrinsecamente più luminosa?

Soluzione:

La stella con magnitudine apparente minore è quella più luminosa, quindi Rigel ci appare più luminosa.

Per definizione la differenza di magnitudine tra due stelle è legata al rapporto dei flussi ricevuti:

$$\text{m(Rigel) - m(Betelgeuse)} = -0.27 = -2.5 \log \frac{F\ (Rigel)}{F\ (Betelgeuse)}$$

e quindi:

$$0.108 = \log \frac{F\ (Rigel)}{F\ (Betelgeuse)}$$

e infine:

$$\frac{F\ (Rigel)}{F\ (Betelgeuse)} = 10^{0.108} = 1.28$$

Il flusso che riceviamo da Rigel è 1.28 volte maggiore di quello che riceviamo da Betelgeuse.

Per stabilire quale delle due stelle è intrinsecamente più luminosa dovremmo calcolare la loro magnitudine assoluta, calcolo per il quale bisogna conoscere la distanza di entrambe le stelle.

4. La magnitudine superficiale della galassia di Andromeda

La galassia di Andromeda ha una magnitudine apparente integrata m_v = 4.40 e appare in cielo come un'ellisse i cui semiassi hanno dimensioni angolari di circa 190 arcmin e 60 arcmin. Sapendo che la sua distanza è di circa 2.54 milioni di anni luce, calcolare la magnitudine assoluta e la magnitudine apparente superficiale media della galassia.

Soluzione:

La distanza della galassia di Andromeda in pc è: $d(pc) = \frac{2.54 \cdot 10^6}{3.262} = 778\ \cdot 10^3\ pc$

La magnitudine assoluta è data dalla relazione:

$$M_v = m_v + 5 - 5 \log d(pc) = -20.1$$

Per calcolare la magnitudine apparente superficiale dobbiamo calcolare l'area apparente della galassia

$$A = \pi\ a\ b = \pi\ \ 190 \cdot\ \ 60\ = 35.8\ \cdot\ 10^3\ arcmin^2\ \cong 129\ \cdot 10^6\ arcsec^2$$

La magnitudine apparente superficiale (m_{sup}) si ottiene dalla relazione:

$$m_{sup} = m_v + 2.5 \log A \cong 15.8\ \frac{mag}{arcmin^2} \cong 24.7\ \frac{mag}{arcsec^2}$$

5. Il pianeta del Piccolo principe

Nel romanzo "Il Piccolo Principe" di Antoine de Saint-Exupery, il protagonista vive su un piccolo pianeta. Considerando che "gli bastava fare due passi per vedere di nuovo il tramonto" e considerando la lunghezza del passo di un bambino pari a 60 cm, calcolare il raggio del pianeta assumendo che la sua distanza dal Sole sia di 1 UA e che l'orbita sia circolare. Dopo aver ricavato il raggio del pianeta rispondere alle seguenti domande:

a) se la densità media del pianeta è pari a quella media della Terra, quanto valgono la sua accelerazione di gravità alla superficie e la sua velocità di fuga?

b) quale dovrebbe essere la densità media del pianeta affinché l'accelerazione di gravità alla sua superficie sia pari a quella terrestre? E quale dovrebbe essere invece la sua densità affinché la velocità di fuga sia pari a quella terrestre?

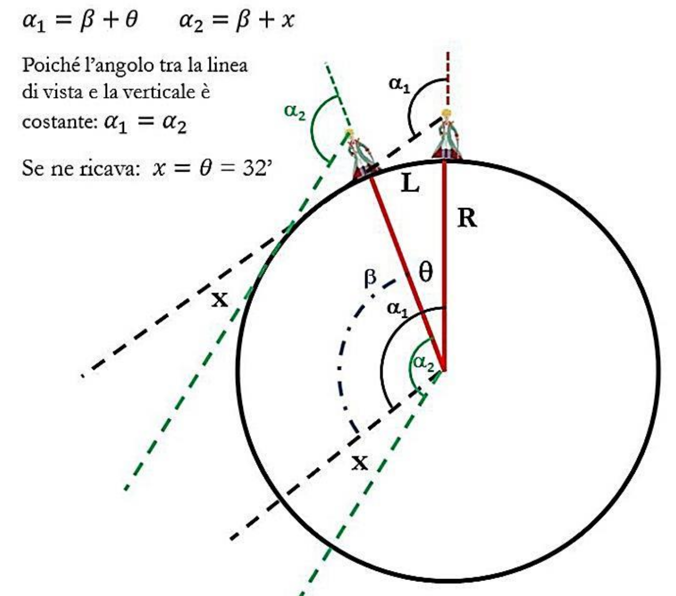
c) in ciascuno dei due casi citati nel punto b, si calcoli la velocità minima al suolo che deve avere un aereo, della massa di 980 kg, per staccarsi dalla superfice. Si consideri il pianeta privo di atmosfera.

Soluzione.

Assumiamo che, per vedere di nuovo il tramonto, il Piccolo Principe si sposti in avanti non appena il disco solare è sceso sotto l'orizzonte e si muova finché vede di nuovo tutto il disco solare sopra l'orizzonte. Assumiamo infine che il tempo per percorrere i due passi sia trascurabile rispetto al periodo di rotazione del pianeta, cosicché non consideriamo il possibile ulteriore spostamento del Sole sotto l'orizzonte mentre il Piccolo Principe si sposta. Quindi la linea di vista del Piccolo Principe si sposta di un angolo "x" pari al diametro angolare del Sole visto da una distanza di 1 UA. Utilizzando la relazione che permette di calcolare le dimensioni angolari di una sorgente estesa vista da una data distanza, otteniamo:

$$x = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_{Sole}}{1\ UA}\right) = 0°.5327 \cong 32'$$

L'angolo "x" è uguale (vedere la dimostrazione in figura) all'angolo (θ) sotteso dallo spostamento del Piccolo Principe (L = 2 passi = 120 cm = 1.2 m) sulla superfice del pianeta, visto dal centro del pianeta.



Disegno non in scala

Il raggio del pianeta (R) si può calcolare in due modi:

1. Noto l'angolo (θ) da cui dal centro del pianeta si vede lo spostamento "L", vale la proporzione:

   θ : 360° = L : 2πR

   da cui ricaviamo:

   $$R = \frac{360° \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot 32'} \cong 129\ m$$

2. Approssimando il tratto L a una retta e l'angolo tra il centro del pianeta e L a un angolo retto si avrà:

   L = R tan θ

   da cui ricaviamo:

   $$R = \frac{L}{\tan\theta} \cong 129\ m$$

a) Scriviamo l'espressione dell'accelerazione di gravità in termini della densità: $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\, G\, \rho \frac{R^3}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\, G\rho R$

Per il pianeta e per la Terra, quindi si ha: $g_P = \frac{4}{3}\pi\, G\, \rho_P R_P$ e $g_T = \frac{4}{3}\pi\, G\, \rho_T R_T$

Dalla seconda equazione ricaviamo: $\rho_T = \frac{3g_T}{4\pi\, G\, R_T} \cong 5490\ \frac{kg}{m^3} = 5.49\ \frac{g}{cm^3}$

che, dovendo imporre $\rho_P = \rho_T$, può essere sostituito nell'espressione di g_P producendo infine:

$$g_P = \frac{4}{3}\pi\, G\, R_P \cdot \frac{3g_T}{4\pi\, G\, R_T} = g_T \frac{R_P}{R_T} = 1.98 \cdot 10^{-4}\ \frac{m}{s^2}$$

Analogamente, ricaviamo l'espressione della velocità di fuga in termini della densità:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho R^3}{3R}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho R^2}{3}}$$

che, per il pianeta e per la Terra, scriviamo come:

$$v_{f,P} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_P {R_P}^2}{3}} \qquad v_{f,T} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_T {R_T}^2}{3}} \cong 11.2\ \frac{km}{s}$$

Dalla seconda si ricava: $\rho_T = \frac{3v_{f,T}^2}{8\pi G R_T^2}$

e sostituendo nella prima, avendo di nuovo imposto $\rho_P = \rho_T$, otteniamo

$$v_{f,P} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_P {R_P}^2}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi G {R_P}^2}{3} \cdot \frac{3v_{f,T}^2}{8\pi G R_T^2}} = v_{f,T}\frac{R_P}{R_T} \cong 0.23\ \frac{m}{s} = \ 2.3 \cdot 10^{-4}\ \frac{km}{s}$$

b) Utilizziamo le stesse formule ricavate per rispondere al quesito (a), ma stavolta imponendo, nel primo caso, che siano uguali le accelerazioni di gravità al suolo ($g_P = g_T$) e, nel secondo caso, che siano invece uguali le velocità di fuga ($v_{f,P} = v_{f,T}$).
Nel primo caso otteniamo:

$$g_P = \frac{4}{3}\pi\ G\ \rho_P R_P = g_T = \frac{4}{3}\pi\ G\ \rho_T R_T$$

da cui, semplificando, si ricava:

$$\rho_P = \rho_T \frac{R_T}{R_P} \cong 271 \cdot 10^6\ \frac{kg}{m^3} = 271\ \cdot\ 10^3\ \frac{g}{cm^3}$$

Nel secondo caso invece otteniamo:

$$v_{f,P} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_P {R_P}^2}{3}} = v_{f,T} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_T {R_T}^2}{3}}$$

da cui, semplificando, si ricava

$$\rho_P = \rho_T \left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2 \cong 1.34 \cdot 10^{13}\ \frac{kg}{m^3} = 1.34\ \cdot\ 10^{10}\ \frac{g}{cm^3}$$

c) La velocità è al suolo, quindi tangenziale e genera una accelerazione centrifuga che fa sollevare l'aereo non appena il suo valore eguaglia l'accelerazione di gravità:

$$a_{min} = \frac{v_{min}^2}{R_P} = g_P = \frac{4}{3}\pi G\rho_P R_P$$

Nei due casi del precedente punto (b), dobbiamo quindi sostituire due espressioni diverse della densità del pianeta. Nel primo caso si ha:

$$a_{min}^{(1)} = \frac{{v_{min}^{(1)}}^2}{R_P} = \frac{4}{3}\pi G\rho_T \frac{R_T}{R_P} R_P = \frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T = g_T$$

da cui si ricava la semplice espressione

$$v_{min}^{(1)} = \sqrt{g_T R_P} \cong 35.5\ \frac{m}{s}$$

Nel secondo caso invece si ha

$$a_{min}^{(2)} = \frac{{v_{min}^{(2)}}^2}{R_P} = \frac{4}{3}\pi G\rho_T \left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2 R_P = \frac{4}{3}\pi G\rho_T \frac{{R_T}^2}{R_P} = g_T \frac{R_T}{R_P}$$

da cui si ricava infine

$$v_{min}^{(2)} = \sqrt{g_T R_T}\ \ \cong 7900\ \frac{m}{s}$$

Nota per le giurie:
Ovviamente ci sono modi alternativi per risolvere i punti a e b. Per esempio dalla tabella abbiamo massa e volume della Terra e ne ricaviamo la densità. Poiché densità della Terra = densità pianeta e del pianeta abbiamo il raggio ne calcoliamo il volume e poi la massa e usiamo le formule standard per accelerazione di gravità e velocità di fuga. Stessa cosa per b, abbiamo i due valori della densità nei due casi, quindi li inseriamo nella formula e troviamo i risultati. Quindi soluzioni più "brevi" di quella mostrata qui sono da considerare ovviamente corrette, la cosa importante è che i risultati numerici siano giusti.