"In Astronomia ogni argomento va meditato ed approfondito in senso critico, va analizzato nei suoi elementi essenziali e collegato a quanto precede ed a quanto segue".

(prof. Leonida Rosino)

Il bignamino di astronomia ha lo scopo di aiutare gli olimpionici alla preparazione alle varie fasi delle Olimpiadi Italiane di Astronomia. Costituisce la griglia essenziale per la risoluzione dei problemi. L'abbiamo pensato come una bussola, soprattutto, per gli studenti che provengono da Istituti dove la fisica non è disciplina curriculare nel biennio. Seguendo il Syllabus, abbiamo suddiviso il "bigino" in quattro macrotemi:

1) Meccanica Celeste (cinematica e dinamica celeste)
2) Ottica: strumenti di misura
3) Astrofisica
4) Cosmologia elementare

Ciascun macrotema è corredato da sezioni e da esercizi di riferimento.

Introduzione

MISURA DEGLI ANGOLI: GRADO, RADIANTE, ORA

L'ampiezza di un arco o del corrispondete angolo al centro si può misurare in uno dei seguenti sistemi:

- Il **sistema sessagesimale**: ha come unità di misura il **grado**

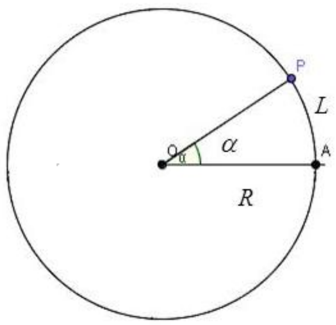
Il grado.

Il grado definito come la 360-esima parte dell'angolo giro. I suoi sottomultipli sono primi e i secondi.

- 1 grado è diviso in 60 primi, 1°= 60'
- 1 primo è diviso in 60 secondi, 1' = 60''
- Quindi un grado equivale a 3600''

Il **sistema circolare**: ha come unità di misura il **radiante**

Radiante Il **radiante (ρ)** è l'ampiezza dell'angolo al centro di una circonferenza che con i suoi lati intercetta un arco uguale al raggio.



Dunque il rapporto tra la misura dell'arco e la misura del raggio è un numero reale α che rimane costante, $\alpha=\frac{L}{R}$;

$\alpha^{rad} = \alpha^{\circ}\frac{\pi}{180}$; $\alpha^{\circ} = \alpha^{rad}\frac{180^{\circ}}{\pi}$

L'ampiezza di un radiante è:

in gradi ρ°= 57° 17' 44''~ 57°,3

in primi ρ'~3438'

in secondi ρ'' ~206265''

(numero magico!!!!)

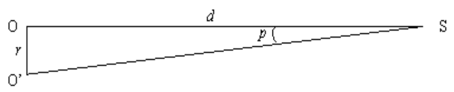
In astronomia è necessario molto spesso convertire la misura in gradi di un arco in misura di ora o viceversa

L'ampiezza di un angolo giro misurato in gradi: 360° in ore è 24^h; $1^h = \frac{360}{24}$ = 15°; 1^m= 15' 1^s=15''

DISTANZE DEI CORPI CELESTI

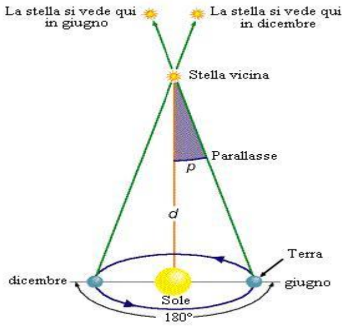
La distanza dei corpi celesti viene determinata attraverso la misura di un angolo detto **parallasse**.

L'angolo di parallasse è l'angolo sotto cui viene visto un oggetto se osservato da due posizioni diverse.



Si parla di parallasse geocentrica, quando la distanza tra le due osservazioni è uguale al raggio terrestre, mentre di parallasse annua, quando la distanza tra i due osservatori è uguale al semiasse maggiore dell'orbita della Terra attorno al Sole (ovvero l'Unità Astronomica). *p* l'angolo di parallasse e *d* la distanza dell'osservatore dall'oggetto-
La relazione tra la distanza e la parallasse è data dalla semplice formula: $d = r / \text{sen } p$

Spesso viene usato il *parsec* come unità di misura delle distanze stellari. Una stella si trova alla distanza di 1 parsec quando la sua parallasse annua è di un secondo d'arco. $d = \frac{1}{p''}$



LE DIMENSIONI APPARENTI DI UN OGGETTO

Le dimensioni apparenti di un oggetto dipendono dalla sua distanza. In astronomia il diametro angolare (o dimensione angolare) di un oggetto è la misura del suo diametro rispetto alla distanza dall'osservatore. Si calcola con la seguente formula:

$$\alpha = 2 \, arctang \, \frac{D}{2d}$$

(D diametro reale e d distanza dall'osservatore).
Generalmente il diametro apparente dei corpi celesti è inferiore ad un grado.

Misurato il diametro apparente in secondi d'arco si può calcolare il diametro reale con la seguente formula:

$$D = \frac{d\alpha}{206265}$$

SISTEMI DI RIFERIMENTO ASTRONOMICI

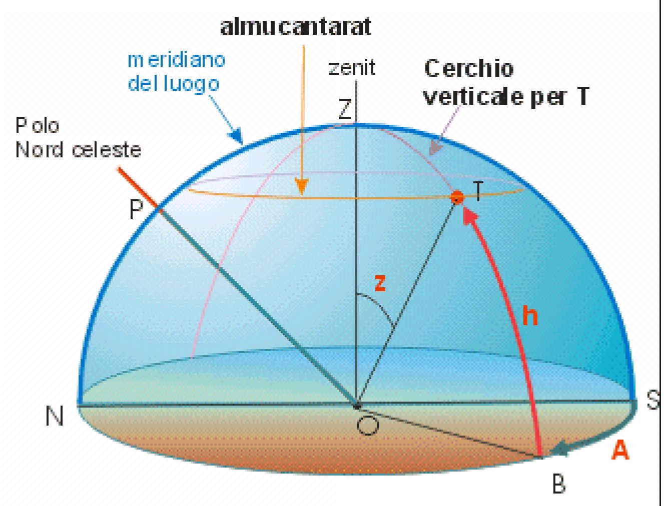
Gli elementi che definiscono i sistemi di coordinate astronomiche sono:

1) Una direzione fondamentale;
2) Un piano perpendicolare alla direzione fondamentale;
3) L'origine
4) Il verso di percorrenza
5) L'unità di misura

Noi qui sintetizziamo tre dei cinque sistemi di riferimento astronomici:

il sistema altazimutale; il sistema orario; il sistema equatoriale

Sistema altazimutale



Nel sistema **altazimutale** o **orizzontale** la *direzione fondamentale* è data dalla verticale, il piano perpendicolare è dato dall'orizzonte astronomico la verticale alla superficie terrestre passante per l'osservatore individua lo zenit e il nadir. Le coordinate in questo sistema sono l'**Azimut** (**A**) e **Altezza (h)**.

L'*azimut* del punto **T** è l'angolo formato dal piano del *cerchio verticale* passante per **T** e il meridiano astronomico. Si misura in gradi e frazioni di grado partendo dal punto cardinale sud nel senso delle lancette dell'orologio. Esso corrisponde, nel disegno, all'angolo **SOB** dove **O** è l'osservatore e **B** è l'intersezione dell'orizzonte con il *cerchio verticale* passante per **T**.

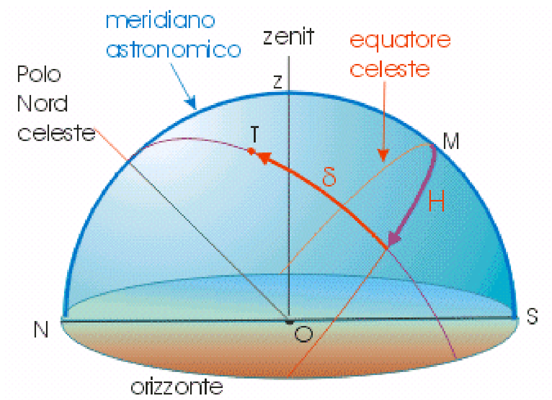
Altezza (**h**): è l'ordinata sferica di un punto sulla sfera celeste e cioè la sua distanza angolare dall'orizzonte misurata lungo il *cerchio verticale* passante per quel punto. Si esprime in gradi e frazioni di grado con valore positivo verso lo zenit e negativo verso il nadir. Nel nostro disegno, l'altezza del punto **T** corrisponde all'angolo **TOB** dove **O** è l'osservatore e **B** è l'intersezione dell'orizzonte con il *cerchio verticale* passante per **T**. L'arco complementare dell'*altezza* si chiama **distanza zenitale** e nel nostro disegno è rappresentata dall'angolo **ZOT** dove **Z** è lo zenit dell'osservatore. La *distanza zenitale* si indica generalmente con **z**. Nel sistema azimutale entrambe le coordinate (*azimut* e *altezza*) delle stelle variano sensibilmente con il passare del tempo a causa del moto di rotazione della Terra.

Sistema orario

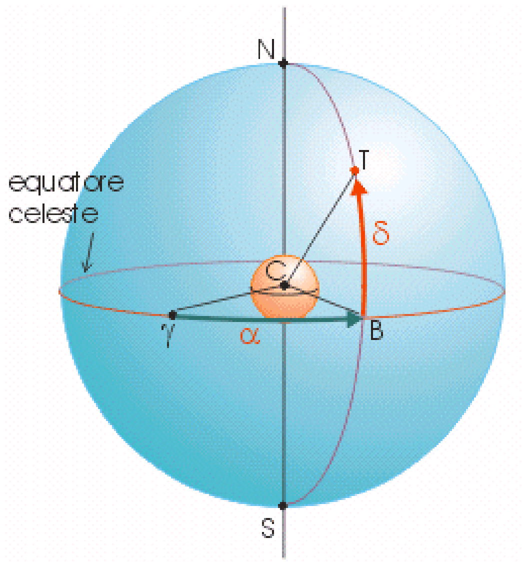
Questo sistema di coordinate astronomiche ha come direzione e piano fondamentali rispettivamente l'asse del mondo e il piano dell'equatore. Le coordinate sferiche di questo sistema sono: **Angolo orario** (**H**) e la **Declinazione** (δ)

L'angolo orario è la distanza angolare tra il *cerchio orario* che passa per il punto e il meridiano astronomico. Si misura in ore e frazioni di ora lungo l'equatore celeste, partendo dal meridiano astronomico, in senso orario per un osservatore boreale.

La declinazione rappresenta la distanza angolare tra un punto della sfera celeste e l'equatore celeste, misurata lungo il cerchio orario che passa per tale punto. Si misura in gradi e frazioni di grado con segno positivo verso il polo nord celeste e negativo verso il polo sud. L'origine del sistema è il punto M detto mezzocielo. In questo sistema nel corso del giorno le stelle variano il loro *angolo orario* mentre rimane costante la loro *declinazione*.



Sistema equatoriale



Questo sistema di coordinate astronomiche ha come direzione e piano fondamentali rispettivamente l'asse del mondo e il piano dell'equatore. Le coordinate sferiche di questo sistema sono: **Ascensione retta** (α), $\lambda\alpha$ **Declinazione** (δ)L'origine è il punto gamma (γ)

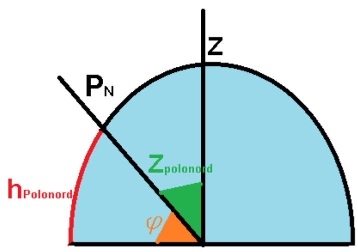
L'ascensione retta si misura di solito in ore, minuti e secondi, lungo l'equatore celeste, partendo dal punto gamma e con senso di percorrenza antiorario.

Declinazione rappresenta la distanza angolare tra un punto della sfera celeste e l'equatore, misurata lungo il cerchio orario che passa per tale punto. Si misura in gradi e frazioni di grado con segno positivo verso il polo nord celeste e negativo verso il polo sud.

RELAZIONI TRA I SISTEMI DI RIFERIMENTO

Latitudine del luogo

$$\varphi = h_{poloNord} = 90° - z_{PoloNord}$$



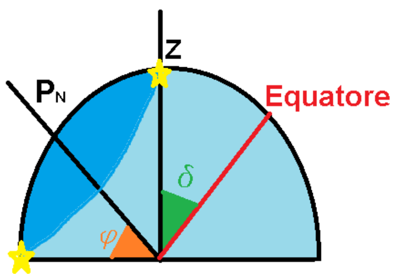
La latitudine geografica φ di una località sulla superficie della Terra è l'altezza del polo celeste sul suo orizzonte. Orizzonte e Zenit sono separati da un angolo retto. La latitudine geografica del luogo si ottiene sottraendo da 90° l'altezza del polo stesso.

Formule inverse:

$$z_{PoloNord} = 90° - \varphi$$

Stelle circumpolari

$$\delta \geq 90° - \varphi$$



Vista da un qualsiasi luogo della superficie terrestre (quando siamo all'Equatore la situazione di complica), una parte della volta celeste non tramonta mai, e rimane sempre al di sopra dell'orizzonte. Tale parte di cielo è detta "circumpolare". Essa contiene le stelle che hanno declinazione δ maggiore o uguale a un valore limite che si ottiene sottraendo da 90° il valore della latitudine geografica φ del luogo.

Se la declinazione è compresa tra

$$-(90° - \varphi) < \delta < +(90° - \varphi)$$

le stelle sono occidue: sorgono e tramontano sull'orizzonte dell'osservatore

Se

$$\delta < -(90° - \varphi) ; \ \delta < -90° + \varphi$$

Le stelle sono anticircumpolari (cioè quelle che non sorgono mai, e stanno sempre al di sotto dell'orizzonte)

Culminazione

Una stella culmina quando raggiunge la sua massima altezza cioè è sul meridiano.

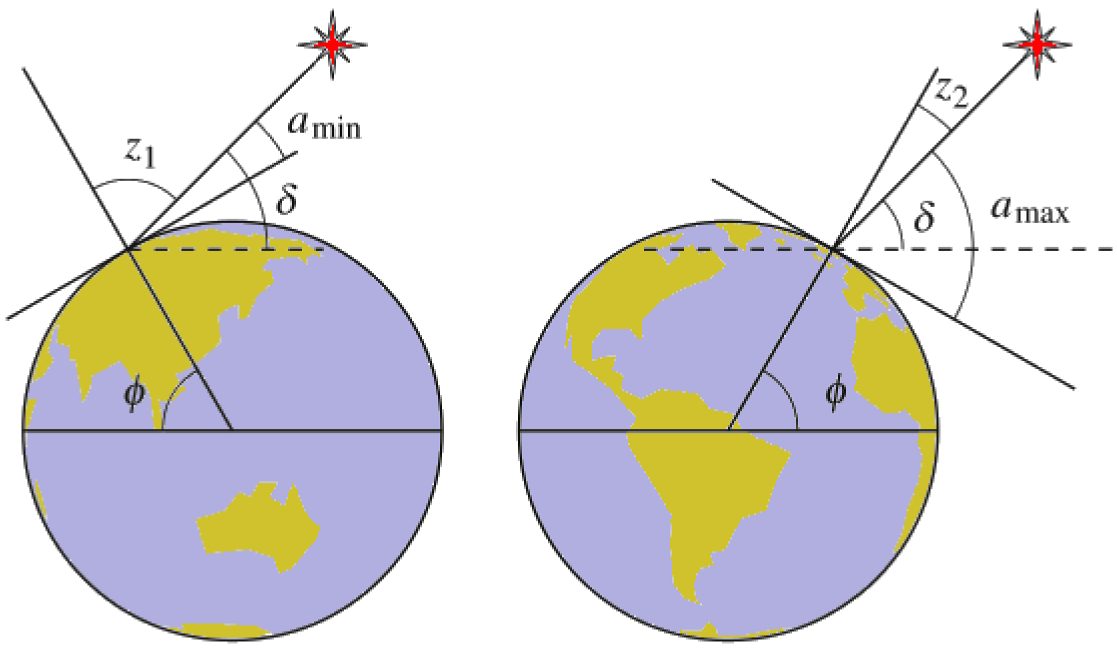
La declinazione δ , la distanza zenitale z sono legate in modo semplice alla latitudine φ dell'osservatore.

Al momento della culminazione superiore (massima altezza della stella sull'orizzonte) si ha:

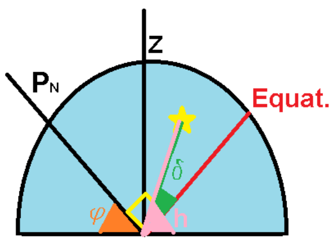
$$z = \varphi - \delta$$

Al momento della culminazione inferiore si ha

$$z = \varphi + \delta - 180°$$



Altezza (culminazione superiore/inferiore)



Una stella culmina superiormente quando raggiunge la sua massima altezza vista un determinato luogo (ad una determinata latitudine φ).

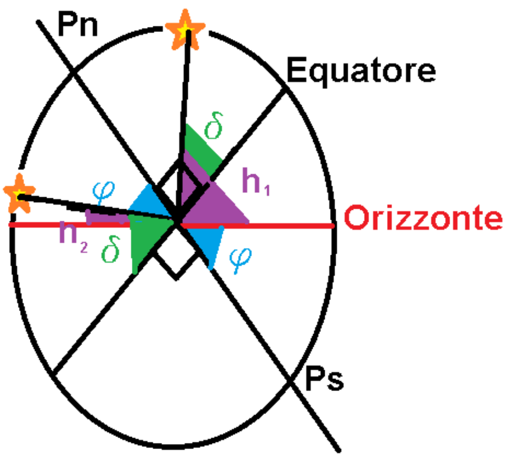
$$h_1 = 90° \pm (\varphi - \delta)$$

Poiché l'altezza deve esere h $\leq$ 90° distinguiamo i due casi:

1) Se $\delta < \varphi$ h=90°- φ + δ (va preso il segno meno)
2) Se $\delta > \varphi$ h=90°+ φ - δ (va preso il segno più)

Analogamente in culminazione inferiore:

$$h_2 = -90° + \varphi + \delta$$



Poiché se $\delta < \varphi$

$$h_2 = \delta - (90 - \varphi)$$

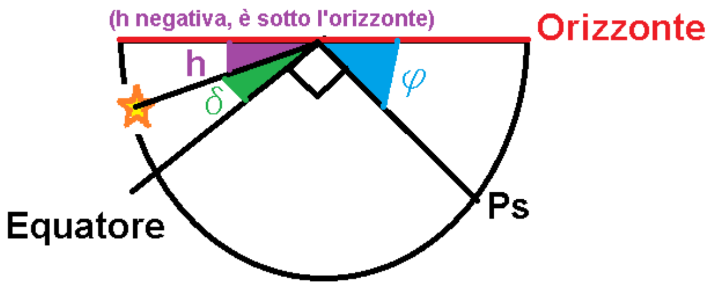
$$h_2 = \delta - 90 + \varphi$$

$$h_2 = -90 + \delta + \varphi$$

Se $\delta > \varphi$

$$h_2 = \delta + (\varphi - 90)$$

$$h_2 = -90 + \delta + \varphi$$



<u>La formula per il calcolo della culminazione inferiore è sempre la stessa!</u>

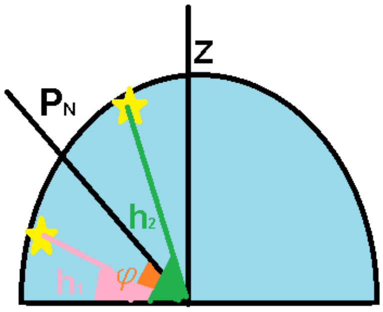
<u>Formule inverse della h=90°+ φ - δ :</u>

$$\varphi = 90° - h + \delta$$

$$\delta = \varphi + h - 90°$$

Latitudine del luogo (culminazione superiore ed inferiore)

$$\varphi = \frac{h_1 + h_2}{2}$$



Questa formula è valida per tutte le stelle, ma la si usa spesso per conoscere la latitudine di un luogo osservando una stella circumpolare. La latitudine, infatti, non è altro che una “media” tra le due altezze (culminazione superiore ed inferiore).

Formule inverse:

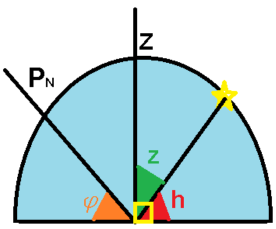
$$h_1 = 2\varphi - h_2$$

$$h_2 = 2\varphi - h_1$$

Per una stella circumpolare la minima altezza è h_{min}= δ + φ - 90°.

Distanza zenitale

$$z = 90° - h$$



La distanza zenitale indica quanto dista la stella dallo zenit, che si trova sulla verticale dell’osservatore. Per trovarla, basta sottrarre a 90° (la verticale e l’orizzonte sono separati da un angolo retto) l’altezza della stella h.

Formule inverse:

$$h = 90° - z$$

Ascensione retta

Tra l'ascensione retta $\boldsymbol{\alpha}$,il suo angolo orario H ed il tempo siderale relativi ad un dato osservatore vale la relazione:

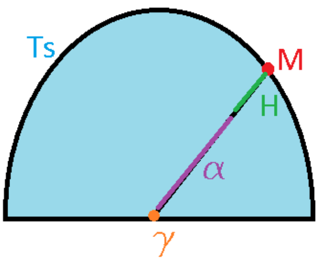
$$T_s = \alpha + H$$

Nota

Quando il punto γ passa al meridiano T_s = 0 (Il tempo siderale è definito come l'angolo orario del punto γ) ; quando la stella passa al meridiano H= 0 e

$$T_s = \alpha.$$

Il tempo siderale coincide con l'ascensione retta delle stelle che passano al meridiano.



Per conoscere l'ascensione retta di una stella α, bisogna calcolare la differenza tra il tempo siderale del luogo T_s di osservazione e l'angolo orario H della stella stessa.

$$\alpha = T_s - H$$

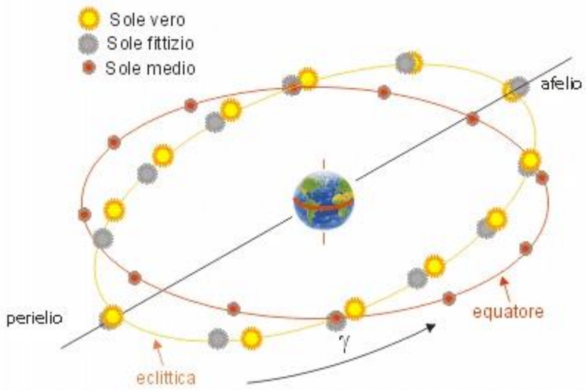
L'angolo orario si trova dalla: $H = T_s - \alpha$

il punto nord ha H di 12 h e declinazione 90 - latitudine da noi H 0 e declinazione 90+ latitudine altro emisfero per il punto sud i due predetti valori si invertono per l'angolo orario e quelli della declinazione diventano opposti

MISURA DEL TEMPO

La misura del tempo viene effettuata dal movimento di rotazione diurna della volta celeste (rotazione della Terra) e dal movimento annuo del Sole (rivoluzione della Terra attorno al Sole).

La rotazione della Terra attorno al suo asse è quasi costante quindi l'angolo di rotazione, rispetto ad un qualsiasi riferimento iniziale consente di misurare il tempo. Come riferimento iniziale si prende l'istante del passaggio del punto al meridiano del luogo. La durata del giorno dipende da questo punto scelto.



In Astronomia i punti adottati sono: Il punto γ; il centro del disco apparente del Sole (Sole vero); il Sole medio (un Sole ideale che parte dal punto γ assieme al Sole vero percorre l'equatore celeste con velocità angolare costante in modo da ritornare all'equinozio di primavere assieme al Sole vero).

Le tre unità di tempo definite da questi punti si chiamano: giorno siderale, giorno solare vero, giorno solare medio. Il tempo da esse misurato è: tempo siderale, tempo solare vero, tempo solare medio.

Nota: Non sono tempi diversi, ma solo diverse unità di misurare il tempo!

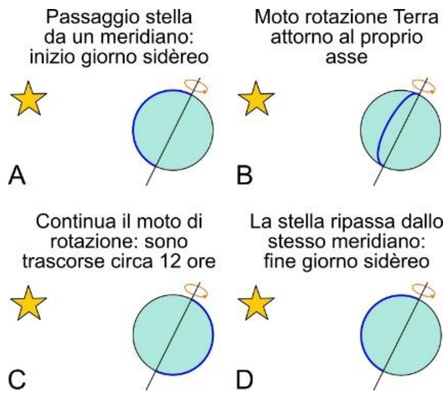
Giorno siderale – tempo siderale

Si definisce giorno siderale l'intervallo di tempo compreso tra due successivi passaggi del punto γ allo stesso meridiano del luogo.

Si definisce tempo siderale l'intervallo di tempo compreso tra il passaggio al meridiano del punto di primavera ad un'altra posizione qualsiasi.

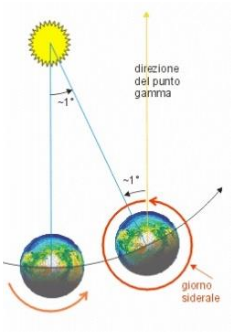
$$t_s = H + \alpha$$

(Tempo siderale = angolo orario Sole + ascensione retta Sole medio)



Giorno solare vero-Tempo solare vero

Il giorno solare vero è l'intervallo di tempo compreso tra due passaggi superiori o inferiori del centro del Sole.



Il tempo solare vero è l'intervallo di tempo compreso tra il passaggio inferiore del Sole ad un altro punto.

Al meridiano il $T_{sole\ vero} = H_{Sole\ vero}\ +12^h$

Giorno solare medio - Tempo solare medio

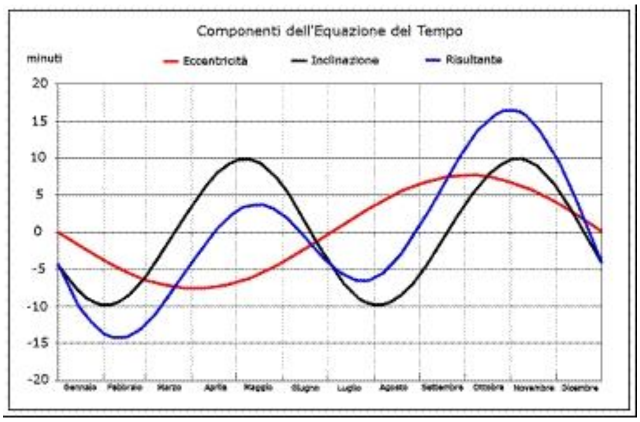
Il giorno solare medio è l'intervallo compreso tra due passaggi superiori o inferiori del Sole medio.

Il tempo solare medio è l'intervallo di tempo compreso tra il passaggio inferiore del Sole medio ad un altro punto.

$$T_{sole\ medio} = H_{Sole\ medio} +12^h$$

Equazione del Tempo

Si definisce equazione del tempo la differenza tra il tempo medio ed il tempo solare vero allo stesso istante.



$$E= T_{sole\ medio} - T_{sole\ vero}$$

$$E= H_{Sole\ medio} - H_{Sole\ vero}$$

$$E= \alpha_{Sole\ medio} - \alpha_{Sole\ vero}$$

Il tempo solare medio ad un dato istante è dato dal Tempo solare vero più l'equazione del tempo:

$$T_{sole\ medio}= T_{sole\ vero}\ + E$$

Relazione tra tempo solare e tempo siderale

Consideriamo la posizione del sole a 24 ore di distanza:

$$t_{1s}=H_{s1}+\alpha_{S1}$$

$$t_{2s}=H_{s2}+\alpha_{S2}$$

Calcolando la differenza tra le due espressioni si ha:

$$t_{2s}-t_{1s}=(H_{s2}-H_{s1})+(\alpha_{S2}-\alpha_{S1})$$

$$(H_{s2}-H_{s1})=24$$

Mentre la differenza in ascensione retta (α_{S2} -α_{S1}) dà lo spostamento angolare diurno del sole medio sull'equatore che in gradi è $\frac{24}{365,25}$

Pe cui:

$$t_{2s}-t_{1s}=24\text{h}+\frac{24}{365,25}$$

$$t_{2s}-t_{1s}=24\left(1+\frac{1}{365,25}\right)$$

$$t_{2s}-t_{1s}=24\,\frac{366,25}{365,25}$$

Un giorno solare medio= $\frac{366,25}{365,25}$ giorni siderali

Un giorno siderale= $\frac{365,25}{366,25}$ giorni solari veri

Il rapporto K = $\frac{366,25}{365,25}$, K=1,002738 serve per convertire gli intervalli di tempo solare medio in intervalli di tempo siderali.

$$\Delta T_s=\text{K}\,\Delta T_m$$

Il rapporto K' = $\frac{365,25}{366,25}$; K' = 0,997270 serve per convertire gli intervalli di tempo siderali in intervalli ti tempo solare medio:

$$\Delta T_m=\text{K'}\,\Delta T_s$$

24 ore di tempo medio corrispondono a 24h 03m 56,55s di tempo siderale; viceversa un giorno siderale è 23h 56m 04s di tempo solare medio.

Se s è il tempo siderale ad un certo istante ad un dato meridiano, mentre alla mezzanotte precedente sullo stesso meridiano, il tempo siderale era S dalla mezzanotte sono passati (s-S) ore, minuti, secondi di tempo siderale che corrispondono a (s-S) K' di tempo solare medio. Poiché a mezzanotte il tempo solare medio è 0^h $T_m =$ (s-S). K' rappresenta il tempo solare medio all'istante del tempo siderale s.

Se al meridiano di quel luogo, alla mezzanotte di una certa data il tempo siderale era S, all'istante di tempo medio solare sarà:

s= S + $T_m . K$

NOTA:

E' sempre necessario conoscere il tempo siderale S alla mezzanotte del meridiano dato. Per questo sono stati costruiti annuari che forniscono il tempo siderale S_0 alla mezzanotte del meridiano fondamentale di GW.

Il tempo siderale S, alla mezzanotte, ad una data longitudine λ è dato da:

$$S = S_0 - \frac{\lambda^h}{24^h}(3^m\,56^s,55)$$

Ora locale e longitudine

Si definisce tempo locale medio il tempo regolato sul meridiano del luogo.

Nella vita quotidiana è scomodo utilizzare questo tempo, per cui il primo luglio 1919 sono stati introdotti i fusi orari. In base a questa suddivisione il tempo medio è determinato solo per 24 meridiani geografici principali separati da 15° gradi (un'ora). I fusi orari sono numerati da 0 a 23 ed il meridiano passante per GW costituisce l'origine (fuso = 0).

Il tempo medio locale è dato da:

$$t_l = t_f - \Delta\lambda$$

dove $\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_O$

Nota

1) La differenza tra le ore locali (siderali o solari) di due meridiani misurate allo stesso istante è sempre uguale alle differenze di longitudini;
2) Poiché i confini dei fusi orari distano circa 7°,5 dal meridiano centrale la differenza t_l - t_f può essere leggermente maggiore o minore di $\pm\ 30^m$

Tempo Universale

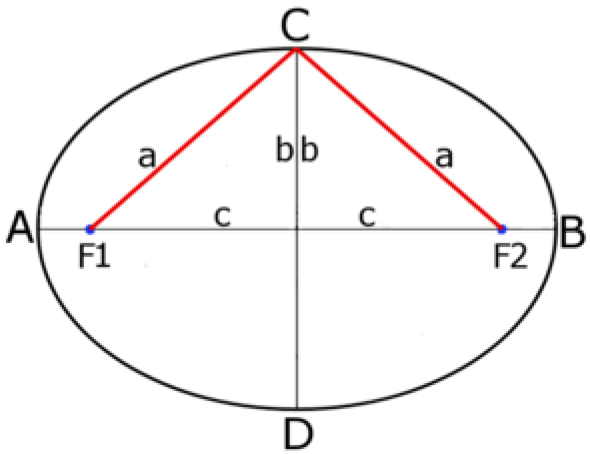
Il tempo solare medio del meridiano di GW si chiama Tempo Universale (TU).

Per quanto precedentemente detto, il tempo medio locale è uguale al tempo universale più la longitudine del luogo espressa in ore e considerata positiva ad est di GW:

$$t_l = \mathrm{TU} + \lambda$$

LE LEGGI DEL MOTO DEI PIANETI

Prerequisito: L'ellisse



Luogo geometrico dei punti del piano per i quali si mantiene costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Detta in parole più semplici, l'ellisse non è altro che una circonferenza "schiacciata". Un elemento fondamentale che ci permette di capire di quanto questa viene compressa è l'eccentricità e. L'eccentricità è definita come il rapporto tra la semidistanza focale e il semiasse maggiore:

$$e = \frac{c}{a}$$

Formule inverse:

$$c = ae$$

$$a = \frac{c}{e}$$

Infatti, nell'ellisse possiamo individuare:

- Semiasse maggiore (a)
- Semiasse minore (b)
- Semidistanza focale (c)

Indicheremo quindi con 2a il semiasse maggiore (AB), con 2b il semiasse minore (CD) e con 2c la distanza focale (F_1F_2).

ATTENZIONE: l'eccentricità dell'ellisse è SEMPRE compresa tra 0 e 1 ($0<e<1$). Se questa fosse uguale a 0, i due fuochi andrebbero a coincidere con l'origine e l'ellisse diventerebbe una circonferenza. Se fosse uguale a 1, diventerebbe una parabola; se fosse $e>1$ diventerebbe una iperbole.

Dalla figura, si nota che la somma delle distanze dai due punti fissi detti fuochi è costante ed è pari alla lunghezza dell'asse maggiore (2a). Quindi, si può anche applicare il teorema di Pitagora:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

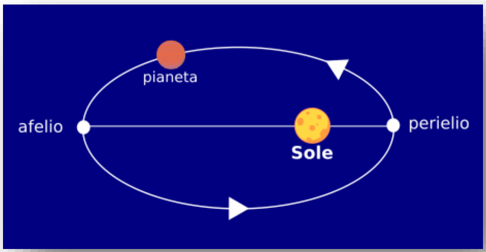
Formule inverse:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

LEGGI DI KEPLERO

PRIMA LEGGE



Enunciato: i pianeti descrivono intorno al Sole orbite ellittiche, in cui questo occupa uno dei fuochi.

Si può quindi notare che la distanza di un pianeta attorno al Sole non si mantiene costante, bensì ci sarà un punto in cui questo sarà più vicino al Sole (perielio) e uno in cui sarà più lontano (afelio).

Possiamo quindi calcolare le due distanze:

$$da = a(1+e)$$

$$dp = a(1-e)$$

Formule inverse:

$$a = \frac{da}{1+e}$$

$$a = \frac{dp}{1-e}$$

$$e = \frac{da}{a} - 1$$

$$e = 1 - \frac{dp}{a}$$

Inoltre, si nota anche che dalla somma delle due distanze otteniamo l'asse maggiore dell'orbita:

$$2a = da + dp$$

E il semiasse è quindi dato da:

$$a = \frac{da + dp}{2}$$

Formule inverse:

$$da = 2a - dp$$

$$dp = 2a - da$$

La distanza focale è data dalla differenza delle due distanze:

$$2c = da - dp$$

$$c = \frac{da - dp}{2}$$

Formule inverse:

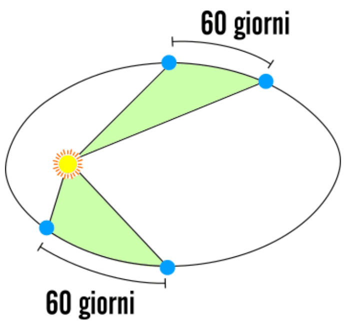
$$da = 2c + dp$$

$$dp = da - 2c$$

Quindi l'eccentricità dell'orbita può essere anche scritta come:

$$e = \frac{da-dp}{da+dp} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

SECONDA LEGGE



Enunciato: il raggio vettore che congiunge il Sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali

Dalla seconda legge comprendiamo che la velocità del pianeta intorno al Sole non è costante: al perielio viaggerà più velocemente che all'afelio. Quindi, si può affermare che le velocità sono inversamente proporzionali alle distanze:

$$\frac{Va}{Vp} = \frac{dp}{da}$$

Formule inverse:

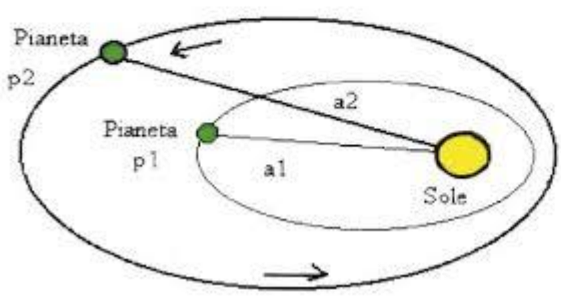
$$Va = \frac{dp\,Vp}{da}$$

$$Vp = \frac{Va\,da}{dp}$$

$$da = \frac{Vp\,dp}{Va}$$

$$dp = \frac{Va\,da}{Vp}$$

TERZA LEGGE



Enunciato: i cubi dei semiassi maggiori sono proporzionali ai quadrati dei periodi di rivoluzione

$$\frac{a^3}{T^2} = k$$

Dalla terza legge, si nota che esiste una relazione tra periodo di rivoluzione e lontananza dal corpo centrale. Sono infatti legati tra loro dal valore di una costante che è stata indicata con k.

Per i corpi orbitanti intorno ad una massa comune (come ad esempi o per i corpi del Sistema solare) questa legge può essere anche scritta come:

$$\frac{{a_t}^3}{{T_t}^2} = \frac{{a_m}^3}{{T_m}^2} = \frac{{a_s}^3}{{T_s}^2} = \cdots$$

PER I CORPI DEL SISTEMA SOLARE, se si inserisce in formula il valore del semiasse maggiore in unità astronomiche (UA) e il periodo di rivoluzione in anni, il valore di questa costante è uguale a 1. Infatti, ricavandola per la Terra:

$$\frac{(1\ UA)^3}{(1\ anno)^2} = 1$$

E se k=1 per la Terra, vale per tutti gli altri corpi orbitanti intorno al Sole.

NEWTON E LA GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Con le leggi di Keplero siamo ancora in quella parte di fisica che descriviamo come cinematica: descriviamo perfettamente i moti dei pianeti ma non risaliamo alle cause. Newton avanzò l'ipotesi che sia i gravi in caduta libera che i pianeti vengono deviati dalla condizione di moto rettilineo uniforme dall'esistenza di una forza centrale. Nel 1684 Newton, "poggiandosi sulle spalle dei giganti" (Keplero ed il nostro Galilei), dimostrò che la forza che fa "fluttuare" i pianeti attorno al Sole dipende dall'inverso del quadrato della distanza da esso.

Integrando il suo secondo principio della dinamica con la terza legge di Keplero perviene a:

$$F_g = \frac{4\pi^2\, m}{Kr^2}$$

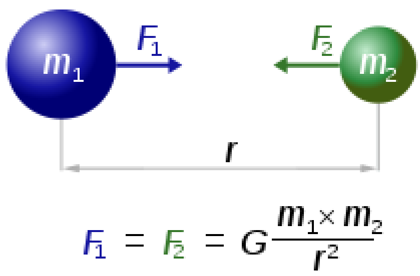
Questa forza deve dipendere anche dalla massa M del Sole ed allora:

$$F_g = \frac{4\pi^2\, mM}{MKr^2}$$

Dove K è la costante della terza legge di Keplero. Ponendo la quantità $\frac{4\pi^2}{MK} = G$ (notare che contiene la costante K e la massa del Sole) otteniamo la nota formula:

$$F_g = \frac{G\, mM}{r^2}$$

Newton dedusse che questa legge è valida non solo per i corpi del sistema solare ma in tutto l'Universo: è la Legge di Gravitazione Universale. Nel 1798 Cavendish ideò la bilancia a torsione e trovò il valore per la costante $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$



Terza legge di Keplero generalizzata

Approssimando l'orbita di un corpo a circolare e considerando trascurabile la massa del corpo orbitante, la condizione di equilibrio per la quale esso orbita è data da:

$$Fc = Fg$$

$$Forza\ centrifuga = Forza\ gravitazionale$$

La forza centrifuga è espressa come:

$$Fc = m\, a_c$$

E quella gravitazionale (dalla legge di gravitazione universale di Newton) come:

$$Fg = \frac{GMm}{a^2}$$

Sostituendo in formula:

$$ma_c = \frac{GMm}{d^2}$$

Notiamo che, semplificando m, otteniamo un modo per esprimere l'accelerazione:

$$a_c = \frac{GM}{d^2}$$

L'accelerazione è espressa come:

$$a_c = \frac{v^2}{a} = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2 a} = \frac{4\pi^2 a}{T^2}$$

Sostituendo in formula:

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2} = \frac{GM}{a^2}$$

<u>Da cui:</u>

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

<u>Formule inverse:</u>

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM\,T^2}{4\pi^2}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}}$$

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{G\,T^2}$$

Nota: nel caso in cui la massa del corpo orbitante non fosse trascurabile, la terza legge di Keplero generalizzata diventerebbe:

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G\,(M+m)}{4\pi^2}$$

Nel Sistema solare la somma delle due masse si considera uguale alla sola massa del Sole data la relativa piccola massa dei pianeti.

NOTA:

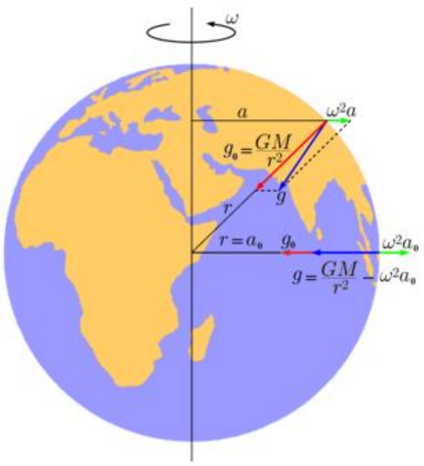
I corpi lasciati cadere verso il basso, quando la resistenza dell'aria è trascurabile, cadono con la stessa accelerazione *g*, detta **accelerazione di gravità**. Sulla superficie terrestre l'accelerazione di gravità è *g* = 9,8 m/s^2. In realtà il valore di *g* cambia da punto a punto, perché dipende fra l'altro dall'altezza del punto sul livello del mare e dalla sua latitudine. Ora che conosciamo la legge di gravitazione universale possiamo dire che i corpi cadono per effetto della forza di gravitazione che si esercita tra il corpo e la Terra. Allora:

$$g = \frac{GM}{d^2}$$

Se il corpo si trova sulla Terra o prossimo alla superficie, sostituendo a questa formula i valori relativi alla massa della Terra e al suo raggio troviamo per l'accelerazione il valore noto di **9,8 m/s^2.**

Un altro fattore che influisce sul valore di g è la rotazione terrestre in quanto ogni corpo su di essa è soggetto ad una forza centripeta per cui:

$$g' = g - \omega^2 R_T$$



"Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, & hypotheses non fingo."

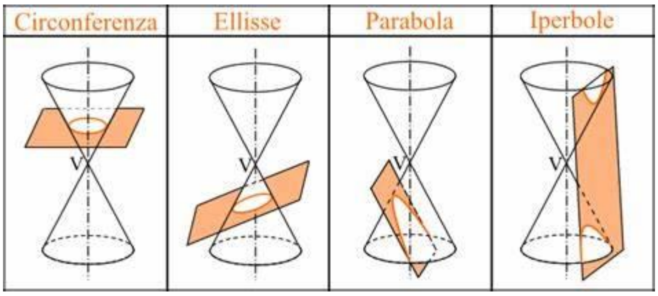
"In verità non sono riuscito a dedurre la causa di queste proprietà della gravità dai fenomeni, e non avanzo ipotesi."

Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, liber tertius*

ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLE ORBITE:

La Legge della Gravitazione Universale ci insegna che la forza d'attrazione gravitazionale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza delle due masse che si attraggono, ovvero $F \propto \frac{1}{d^2}$; a causa di questa caratteristica dell'interazione gravitazionale si può dimostrare che le orbite descritte dai corpi celesti attorno a un oggetto "attrattore" seguono particolari curve, le **coniche**.

Le coniche sono curve che si ottengono dall'intersezione di *un piano* con un *cono a due falde*. Si ottengono così *circonferenza, ellisse, iperbole e parabola*.



Circonferenza: il piano è perpendicolare all'asse (tratteggiato);
Ellisse: il piano è obliquo;
Parabola: il piano è parallelo a una delle generatrici (le due rette incidenti in V in figura);
Iperbole: il piano è parallelo all'asse del cono.

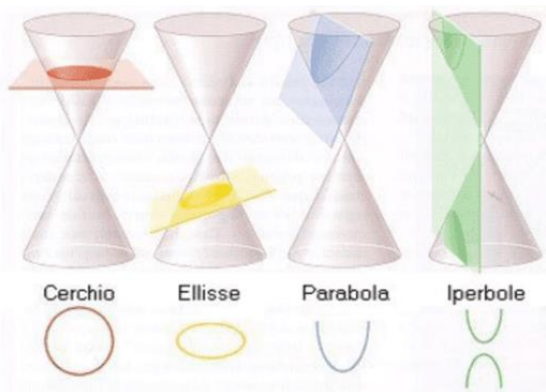
Ciò che distingue l'una dall'altra queste curve è un parametro, l'*eccentricità*:

CIRCONFERENZA: e=0

ELLISSE: 0<e<1 (più questo valore si avvicina ad 1 più l'ellisse è schiacciata)

PARABOLA: e=1

IPERBOLE: e>1 (quanto più maggiore di uno è questo valore tanto più l'iperbole è "aperta")



VELOCITÀ ORBITALE: ORBITA CIRCOLARE

Affinché il corpo rimanga in orbita è necessario che in ogni punto dell'orbita la forza centripeta sia uguale alla forza di attrazione gravitazionale:

$$F_C = F_G$$
$$m\frac{v^2}{R} = \frac{mMG}{R^2}$$
$$\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{R}} = \frac{\cancel{m}MG}{R^{\cancel{2}}}$$
$$v^2 = \frac{MG}{R}$$
$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{MG}}{\mathbf{R}}}$$

A questa velocità si dà il nome di ***prima velocità cosmica***.

VELOCITÀ SU ORBITE NON CIRCOLARI

Il problema si risolve con l'applicazione del principio di conservazione dell'energia meccanica che altro non è che la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

$$\boldsymbol{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

E poiché le velocità orbitali variano al variare dalla distanza alla prima equazione è necessario associare la seconda legge di Keplero.

Per cui il problema è risolto dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{K_1 + U_1 = K_2 + U_2} \\ \boldsymbol{v_a\, d_a = v_p d_p} \end{cases}$$

Nel caso della forza gravitazionale, l'energia potenziale è $U = -\frac{mMG}{R}$

L'energia cinetica è K= $\frac{1}{2}mv^2$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} v_a d_a = v_p d_p \\ \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GmM}{d_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM}{d_p} \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $\boldsymbol{v_a} = \sqrt{\boldsymbol{2GM \frac{d_p}{d_a(d_p+d_a)}}}$ $\quad \boldsymbol{v_p} = \sqrt{\boldsymbol{2GM \frac{d_a}{d_p(d_p-d_a)}}}$

Ricordando che: $d_a = a(1+e)$; $d_p = a(1-e)$; $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{d_a+d_p}}{\boldsymbol{2}}$; $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{d_a-d_p}}{\boldsymbol{d_a+d_p}}$

le due velocità possono anche essere espresse in funzione del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita.

Quindi **:**

$$v_p = \sqrt{\boldsymbol{\frac{GM}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}}$$

$$v_a = \sqrt{\boldsymbol{\frac{GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}}$$

ALCUNE CONSIDERAZIONI DINAMICHE SULLE ORBITE

All'inizio di questi appunti abbiamo evidenziato come gli oggetti orbitanti seguano delle traiettorie che sono curve coniche e abbiamo individuato quest'ultime, catalogandole anche a seconda dell'eccentricità; in seguito abbiamo enunciato il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\boldsymbol{K + U = costante}$$

Possiamo procedere nella classificazione delle orbite a seconda del valore assunto da questa costante (l'energia meccanica). In particolare:

- Se questa costante è **negativa**, allora l'oggetto segue un'orbita chiusa (**circonferenza, ellisse**);
- Se essa è **nulla**, allora il corpo si muove su un'orbita **parabolica** (a distanza infinita la sua velocità è nulla);
- Se essa è **positiva**, allora la traiettoria è **iperbolica** (e il corpo giunge a distanza infinita con velocità – chiamata "velocità d'eccesso iperbolico" – non nulla).

VELOCITÀ DI FUGA – RAGGIO DI SCHWARZSCHILD

$$\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

A questa velocità si dà il nome di ***seconda velocità cosmica*** o ***velocità di fuga***.

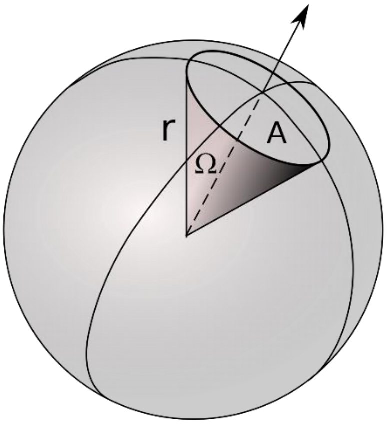
Immaginiamo ora di poter comprimere un corpo celeste di massa M (quindi via via il raggio R diminuisce): la velocità di fuga di un altro corpo dalla sua superficie aumenterà al diminuire del raggio. Quando il raggio raggiungerà un valore "critico", la velocità di fuga eguaglierà quella della luce, e neanche la luce potrà allontanarsi indefinitamente dal corpo: esso è diventato un *buco nero*.

Al raggio "critico" associato a ogni massa M si dà il nome di Raggio di Schwarzschild, in onore del matematico, astronomo e astrofisico tedesco Karl Schwarzschild (1873-1916); il raggio si ricava così:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_s}} \quad \rightarrow \quad c^2 = \frac{2GM}{R_s} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R_s = \frac{2GM}{c^2}}$$

Dove c è la velocità della luce (c=299792458 m/s).

ANGOLO SOLIDO



Si definisce angolo solido la porzione di sfera intercettata dalle semirette che lo individuano:

$$\Omega = \frac{A}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

$$\Omega = 4\pi$$

L'angolo solido totale di una sfera è pari a 4π. L'unità di misura è sr (steradiante) ed è un numero puro.

Per avere la misura in gradi quadrati si deve

$$moltiplicare: 4\pi \bullet \left(\frac{180°}{\pi}\right)^2 \qquad o\ dividere: \frac{4\pi}{\pi\square^2}$$

4π sr= 41253□° -> 1□°=$3.046 \bullet 10^{-4} sterad.$

STRUMENTI OTTICI

CAMPO DELLO STRUMENTO

Il campo di uno strumento è definito dall'angolo solido sotto il quale l'oculare viene visto dal centro dell'obiettivo. Il campo corretto dalle aberrazioni ottiche di norma è $\frac{1}{2}\square°$

APERTURA ASSOLUTA

L'apertura assoluta dipende dal diametro D dello strumento. La quantità di luce raccolta è proporzionale all'area dell'obiettivo $\cong D^2$

APERTURA RELATIVA

Si definisce apertura relativa il rapporto:

$$\frac{D}{f} = \frac{apertura\ assoluta\ (diametro)}{focale\ dell'obiettivo}$$

RAPPORTO FOCALE

L'inverso dell'apertura relativa $\frac{f}{D}$ definisce il rapporto focale

L'energia raccolta dall'obiettivo è distribuita sull'area dell'immagine la cui grandezza sul piano focale è data da:

$$d = f \bullet tan\alpha$$

Con α=diametro angolare dell'oggetto

$$d = f\alpha$$

Se α è espresso in radianti

POTERE RISOLUTIVO

Il potere risolutivo è la minima distanza angolare tra due sorgenti di luce che possono essere viste separate ("risolte", in termine tecnico) secondo un criterio detto di Rayleigh.

Due sorgenti puntiformi (di uguale luminosità) risultano risolte quando la loro distanza angolare:

$$\theta = \frac{1.22 \bullet \lambda}{D} = \frac{lunghezza\ d'onda}{diametro}$$

Si ottiene un risultato in radianti

In secondi d'arco, invece:

$$\theta = \frac{2.5 \bullet 10^5 \bullet \lambda}{D}$$

Con λ=lunghezza d'onda della luce=5500Å (regione di massima sensibilità dell'occhio)

Il potere risolutivo dell'occhio, assumendo la pupilla con un diametro di 3 mm, è uguale a:

$$\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D} = 1{,}22 \bullet \frac{5500 \bullet 10^{-9}m}{3 \bullet 10^{-3}m} = 2.24 \bullet 10^{-4}rad = 46"$$

Il fattore di conversione da radianti a secondi è il NUMERO MAGICO: 1 rad = 206265"

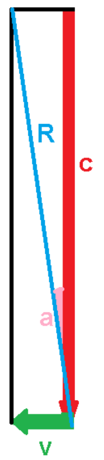
Nella determinazione del potere risolutivo interviene l'apertura dello strumento e non l'ingrandimento.

INGRANDIMENTO

L'ingrandimento dello strumento è dato dal rapporto tra la focale dell'obiettivo f e la pupilla dell'oculare f'

$$g = \frac{f}{f'}$$

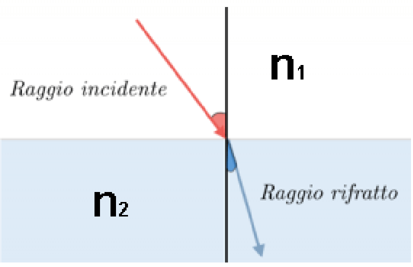
ABERRAZIONE DELLA LUCE



Quando i raggi di una stella arrivano sulla Terra, la loro direzione di provenienza appare leggermente deviata a causa della velocità orbitale del pianeta v. I vettori delle velocità (della luce e del pianeta) si combinano per dare un vettore risultante di poco inclinato dalla direzione di provenienza dei raggi.

$$a = \arctan\frac{v}{c}$$

RIFRAZIONE



Il fenomeno della rifrazione ha origine dal cambiamento di velocità delle onde luminose quando passano da un mezzo trasparente all'altro. Esiste una proporzione tra le due diverse velocità e i seni degli angoli $\theta_{incidenza}$ e $\theta_{rifrazione}$ che i raggi formano con la linea normale alla superficie nel punto colpito dal raggio. Se consideriamo gli indici di rifrazione n_1 e n_2 dei materiali, la proporzione è inversa.

$$\frac{sin\theta_{incidenza}}{sin\theta_{rifrazione}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

RIFRAZIONE ATMOSFERICA

All'entrata nell'atmosfera terrestre, i raggi luminosi provenienti da un corpo celeste che si trova a distanza zenitale z vengono rifratti (deviati verso il basso) di un angolo r. Quindi i corpi celesti si osservano in una posizione leggermente più alta del reale. In particolare, possiamo vedere oggetti che si trovano anche sotto l'orizzonte geometrico del luogo (es. Il sole al tramonto). La formula stabilisce che l'angolo di rifrazione è proporzionale alla tangente della distanza zenitale.

Questa formula **vale fino ad angoli $\boldsymbol{z \approx 70}$**°.

Oltre questo valore, fino all'orizzonte, la rifrazione aumenta fino a raggiungere il valore massimo di 35'

$$r = 58.2'' \tan(z)$$

PROBLEMI ED ESERCIZI

SISTEMI DI RIFERIMENTO E COORDINATE ASTRONOMICHE:

1. Quando la stella Rigel (δ= -8° 13’) passa al meridiano di Roma (ϕ=41°55’) a quale altezza si trova?

   Soluzione: Quando la stella Rigel passa al meridiano di Roma essa raggiunge la posizione di culminazione superiore in corrispondenza del punto cardinale Sud. Dunque la sua altezza sull’orizzonte è pari all’altezza dell’Equatore celeste alla latitudine di Roma (90°-ϕ) sommata alla declinazione dell’astro. Dunque h_{Rigel}=90°-ϕ+δ=90°-41°55’-8°13’=39°52’.

2. A quale latitudine comincia a essere visibile la stella Canopo (δ=-52°40’) appena all’orizzonte?

   Soluzione: Affinché la stella Canopo sia appena visibile all’orizzonte per un osservatore posto alla latitudine ϕ, è necessario che l’Equatore celeste abbia un’altezza sull’orizzonte pari al valore assoluto della sua declinazione. Quindi è necessario che 90°-ϕ=|δ| e cioè ϕ=90°-|δ|=90°-52°40’=37°20’.
   [In realtà bisogna tenere conto dell’effetto della rifrazione atmosferica che “alza le stelle” o equivalentemente “abbassa l’orizzonte” di un angolo di 35’. Quindi in realtà Canopo si può osservare anche a una latitudine leggermente più settentrionale pari a 37°20’+0°35’=37°55’ circa].

3. Quale curva descrive l’ombra di uno stilo verticale posto al polo nord il 21 giugno? Qual è il rapporto fra la lunghezza l dell’ombra e l’altezza h dello stilo?

   Soluzione: Il 21 giugno il Sole ha declinazione massima, pari al valore dell’obliquità dell’eclittica, quindi circa 23°27’. Dal momento che al polo nord l’orizzonte coincide con l’Equatore celeste e i paralleli celesti si trovano quindi su piani paralleli all’orizzonte, la rotazione diurna non contribuirà a far tramontare il Sole, che descriverà una circonferenza nel cielo; pertanto la curva descritta dallo stilo verticale è una circonferenza. Il rapporto l/h è il reciproco della tangente dell’altezza del sole, pari a 23°27’

   $$\frac{l}{h}=\frac{1}{tan23°27\prime}=2{,}3.$$

4. **(PROBLEMA GARA INTERNAZIONALE 2002)** I Cinesi, nel 1100 a.C., avevano trovato che l’altezza del Sole a mezzodì era 79°7’ nel solstizio estivo e 31°19’ in quello

invernale. A quale latitudine hanno fatto l'osservazione e qual era allora l'obliquità dell'Eclittica?

Soluzione: La media aritmetica dei valori delle due culminazioni del sole a mezzodì al solstizio estivo ed invernale è pari all'altezza dell'Equatore celeste. Quindi:

$$90° - \varphi = \frac{h_{estate} + h_{inverno}}{2} \rightarrow \varphi = 90° - \frac{h_{estate} + h_{inverno}}{2} = 34°47'$$

L'obliquità dell'eclittica è la differenza fra l'altezza massima del sole e l'altezza dell'Equatore celeste:

$$\varepsilon = h_{estate} - (90° - \varphi) = 79°7' - 90° + 34°47' = 23°54'.$$

[In generale, l'obliquità dell'eclittica varia da 21°55' a 24°20', con un periodo di circa 40000 anni]

I MOTI DELLA TERRA E LA MISURA DEL TEMPO:

5. In quale istante di tempo siderale la stella Castore (α=7h 33m 31s ; δ=+31°55'35") è alla culminazione inferiore?

   Soluzione: Alla culminazione inferiore la stella Castore ha un angolo orario pari a 12h. Il tempo siderale, ossia l'angolo orario del punto gamma, è uguale alla somma di angolo orario e ascensione retta di una generica stella; in questo caso
   TS=α+H=7h 33m 31s + 12h= 19h 33m 31s.

6. Se in un dato giorno una stella passa al meridiano inferiore alle 21, a quale ora (all'incirca) vi passerà un mese dopo?

   Soluzione: L'ora a cui si riferisce il problema è, per esempio, quella indicata da un normale orologio, quindi è un tempo solare medio e non siderale. Siccome nel corso di un mese la stella non cambia la sua posizione rispetto al punto gamma, se il problema avesse chiesto l'ora *siderale* della successiva culminazione inferiore la risposta sarebbe stata comunque "alle 21"; siccome però il problema si riferisce a un tempo solare medio, dobbiamo tenere conto della differenza tra giorno solare e giorno siderale: quest'ultimo è più corto del primo di un valore pari a circa 4 minuti (più esattamente 3min 56s). Siccome un mese contiene mediamente 30 giorni, la stella anticiperà la sua culminazione di circa 4min*30=120min=2h e quindi culminerà all'incirca alle 19.

7. Una città A è posta alla longitudine 43°12' E di GW (Greenwich). Quando in A l'orologio segna le 20h35m siderali, in un'altra città B l'orologio segna le 23h12m siderali. Qual è la longitudine di B?

Soluzione: La differenza dei due tempi siderali che l'orologio segna in A e in B è uguale alla differenza delle longitudini dei due luoghi. Quindi:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = \Delta TS \ \rightarrow \ \lambda_B - \lambda_A = TS_B - TS_A \rightarrow \lambda_B &= TS_B - TS_A + \lambda_A (espressa\ in\ ore!) \\ &= 23h12m - 20h35m + 2h53m = 5h30m \\ &= (trasformo\ in\ gradi) = 82°30'\end{aligned}$$

8. Quanto tempo è necessario affinché il punto gamma passi da un segno zodiacale a un altro?

Soluzione: Il punto gamma non è fisso nel cielo, bensì, per via di uno dei moti millenari della Terra, il moto di precessione, esso si sposta di circa 50" all'anno lungo l'Eclittica. Dal momento che i segni zodiacali sono dodici, in media ognuno di essi occupa un settore lungo l'Eclittica pari a 360/12=30°=108000". Ne discende che il tempo necessario affinché il punto gamma copra questa distanza angolare risulta pari a t=(108000"/50")anni=2160 anni circa.

9. La Terra impiega circa 23 ore e 56 minuti a compiere una rotazione completa attorno al proprio asse. Con quale velocità tangenziale si muove un punto all'equatore per effetto del moto di rotazione della Terra? Quanto vale l'accelerazione centripeta che agisce su questo punto? Quale forza centripeta agisce su un corpo di massa 1,3 kg all'equatore?

Soluzione: Il problema, incentrato sul moto di rotazione terrestre (il moto dei punti della Terra attorno all'asse terrestre) è un semplice esercizio di cinematica. Conoscendo il periodo e la lunghezza della circonferenza equatoriale (poiché è noto che il raggio della Terra ha un valore di 6378 km), è possibile determinare la velocità di rotazione all'equatore: il moto è circolare uniforme:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\tau \cdot 6378km}{23{,}93h} = 1674\frac{km}{h}$$

L'accelerazione centripeta vale:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(1674 \div 3{,}6)^2}{6378000} = 33{,}9 \cdot 10^{-3}\frac{m}{s^2}$$

Per la seconda legge della dinamica, la forza centripeta su un corpo di massa m allora vale:

$$F = ma = 1{,}3 \cdot 33{,}9 \cdot 10^{-3} = 44{,}1 \cdot 10^{-3}N$$

IL CIELO VISTO DALLA TERRA E LA LUNA:

10. Due stelle equatoriali hanno parallassi 0",022 e 0",034; esse hanno AR 12h13m e 13h12m rispettivamente. Quant'è in parsec la loro reciproca distanza?

Soluzione: L'angolo fra la direzione con cui si proietta in cielo la prima stella e la direzione della seconda stella è pari alla differenza delle ascensioni rette: le stelle sono infatti equatoriali, cioè hanno declinazione nulla: ΔAR=13h12m-12h13m=(trasformando in gradi)=14°,75. La loro distanza dall'osservatore è, in parsec, pari al reciproco della parallasse:
d1=(1/P1)=1/0,022=45,5pc; d2=(1/P2)=1/0,034=29,4pc.
Il problema chiede in sostanza di calcolare un lato di un triangolo con vertici nell'osservatore e nelle due stelle (in particolare il lato con estremi nelle due stelle) noti l'angolo opposto a tale lato e gli altri due lati: possiamo quindi usare il Teorema di Carnot (o teorema del coseno):

$$x = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos(\Delta AR)} = 18{,}6\, pc$$

11. Sapendo che il periodo siderale di rotazione del Sole all'Equatore è di 25 giorni, trovare il periodo di rivoluzione sinodica, cioè quello che appare visto dalla Terra.

Soluzione: Prendiamo un punto sull'Equatore del Sole: esso si muove con un periodo siderale (cioè riferito a una stella lontana) pari, come indicato dalla traccia, a 25 giorni. Il problema è del tutto analogo al calcolo del tempo sinodico di un pianeta interno visto dalla Terra noti i periodi di entrambi i corpi.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{sole}} - \frac{1}{T_{terra}} \rightarrow S = \frac{T_{terra} T_{sole}}{T_{terra} - T_{sole}} = \frac{365{,}25 \cdot 25}{365{,}25 - 25} d = \frac{9131{,}25}{340{,}25} d = 26{,}84 d$$

12. A quale distanza da uno schermo deve essere posta una sfera di raggio R affinché, illuminata dal Sole, non generi ombra ma solo penombra? (il diametro apparente del Sole sia 32'.)

Soluzione: Concettualmente il problema è equivalente alla situazione di un'eclisse: l'"osservatore" è lo schermo, mentre fra esso e il Sole si frappone un ostacolo. Esso, intercettando i raggi solari, genera dietro di sé un cono d'ombra, e, molto più ampio di questo, una zona di penombra. Il cono si restringe dalla parte opposta del Sole rispetto alla sfera. Se il vertice del cono si trova sullo schermo, allora nessun punto dello schermo si troverà in ombra perché il cono *non interseca* lo schermo. In questa configurazione, l'angolo sotto cui viene vista la sfera dallo schermo è di 32', ovvero 0,53°, da cui si ha: $\frac{R}{d} = \tan\,(0{,}53/2)$ e cioè d=[1/ tan(0,265)]*R=214,8 R circa: la sfera dev'essere posta a una distanza dallo schermo maggiore di 214,8 volte circa il suo raggio.

13. Il 29 marzo 2006 si è verificata un'eclisse totale di Sole, visibile dall'Africa settentrionale e dal Mediterraneo orientale. Quale fase aveva la luna il 29 marzo 2007, cioè esattamente un anno dopo?

    Soluzione: Le eclissi di Sole si verificano quando la Luna si interpone fra il Sole e la Terra, oscurando una fascia sulla superficie del nostro pianeta con il suo cono d'ombra: pertanto, la Luna rivolge a noi, in quest'occasione, la sua faccia non illuminata dal Sole e pertanto è *nuova*. Conosciamo inoltre il periodo in cui si ripetono le fasi lunari: è il mese sinodico, la cui durata è pari a 29,5306 giorni. L'intervallo considerato (un anno, in cui il 2007 non è bisestile), è pari a 365 giorni. Siccome 365/29,5306=12,36, ossia 12 mesi lunari e 11 giorni, se ne deduce che l'età della Luna al 29 marzo 2007 era di 11 giorni, quindi essa era in una fase intermedia tra primo quarto e Luna piena.

LA GRAVITA':

14. L'alieno Bzzapp ha appena comprato una navicella in grado di creare nuovi pianeti; nel suo girovagare, un giorno incappa nel nostro Sistema Solare; decide così di creare con la sua astronave qualche nuovo pianeta. L'amico Zorzzp gli dà prima una regola, dicendogli che questi pianeti devono trovarsi in una fascia compresa fra 2 U.A. e 7 U.A.; in più, il loro periodo di rivoluzione dev'essere pari a un numero intero di anni. Qual è il numero massimo di pianeti che Bzzapp potrà creare con la sua navicella conformemente alla regola di Zorzzp?

    Soluzione: Per la risoluzione del problema è necessaria la Terza legge di Keplero, considerando che ci troviamo nel nostro Sistema Solare e che quindi la costante di proporzionalità fra cubo del semiasse maggiore e quadrato del periodo di rivoluzione per un generico corpo orbitante attorno al Sole, quando esprimiamo il semiasse in UA e il periodo in anni, risulta pari a 1.

    $$T_1 = \sqrt{{a_1}^3} = 2{,}83\ y$$
    $$T_2 = \sqrt{a_2^3} = 18{,}52\ y$$

    Come possiamo vedere, i periodi "possibili" sono 3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17 e 18 anni: Bzzapp potrà creare ben 16 pianeti!

15. Disponendo come dati noti dei soli periodi di rivoluzione dei pianeti, si indichi la lunghezza minima che deve avere un foglio di carta per poter rappresentare in scala il Sistema Solare fino a Nettuno, nell'ipotesi di voler rappresentare Mercurio a una distanza dal Sole di 1 cm.

Soluzione: Mercurio ha un periodo di rivoluzione pari a 0,241 anni mentre Nettuno 164,88 anni: quindi, per la Terza legge di Keplero: $a_M = \sqrt[3]{T_M^2} = 0{,}387 UA\ \ e\ \ a_N = \sqrt[3]{T_N^2} = 30{,}069\ UA$.
Con una semplice proporzione ricaviamo la lunghezza del foglio di carta:

$$a_M : a_N = 1 : x \quad \rightarrow x = \frac{30{,}069}{0{,}387} cm \approx 77{,}7\ cm$$

16. A quale distanza dalla superficie della Terra, per un'astronave che viaggia verso la Luna, si annulla la risultante delle forze gravitazionali che agiscono su di essa? (il rapporto massa della Terra/ massa della Luna è pari a 81,25).

Soluzione: La distanza Terra-Luna è pari a d=384400 km. Quando l'astronave si trova fra il nostro pianeta e il suo satellite, le due forze di natura gravitazionale che agiscono su di essa sono la forza di attrazione della Terra e quella della Luna, agenti nella stessa direzione ma aventi verso opposto. Chiamando x la distanza che separa la navicella dal centro della Terra, possiamo esprimere in funzione di x la distanza che separa la navicella dalla Luna, essendo essa pari a d-x. Eguagliamo le due forze di attrazione gravitazionale per trovare x.

$$\frac{GM_T m}{x^2} = \frac{GM_L m}{(d-x)^2}$$

Operando le dovute semplificazioni (G e la massa dell'astronave) e dividendo:

$$\frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = \sqrt{81{,}25} = 9{,}01$$

$$x = \frac{9{,}01d}{10{,}01} = 0{,}90 * 384400km = 346013km$$

Il problema viene considerato parzialmente corretto se ci si ferma a questo punto, perché esso chiede la distanza dalla superficie terrestre mentre x è misurata dal centro della Terra: pertanto la soluzione corretta è: D=x-R=(346013-6378)km=339635km.

17. Osservando la stella Canopo con un telescopio potentissimo, l'astronomo Qwzzz ha scoperto due pianeti orbitanti attorno a essa, le cui orbite sono esattamente perpendicolari alla nostra linea di vista. La distanza massima del primo pianeta da Canopo è uguale a 4,7 volte la sua distanza minima, e il suo periodo di rivoluzione è pari a 2,7 anni. Il secondo pianeta, avente eccentricità pari a 0,324, al periapside è 3 volte più lontano rispetto al primo (quando quest'ultimo si trova nella corrispondente posizione). Quanto vale l'eccentricità del primo pianeta e il periodo di rivoluzione del secondo?

Soluzione: Chiamiamo 1 il primo pianeta e 2 il secondo:

$$\frac{d_{a1}}{d_{p1}} = 4{,}7 = \frac{a_1(1+e_1)}{a_1(1-e_1)} \rightarrow \frac{1+e_1}{1-e_1} = 4{,}7 \rightarrow e_1 = 0{,}649$$

$$\frac{d_{p2}}{d_{p1}} = \frac{a_2(1-e_2)}{a_1(1-e_1)} = 3 \rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{(1-e_1)d_{p2}}{d_{p1}(1-e_2)} = 3\left(\frac{1-0{,}649}{1-0{,}324}\right) = 1{,}558$$

Per la Terza legge di Keplero:

$$T_2^2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 T_1^2 \rightarrow T_2 = 2{,}7\ y\sqrt{1{,}558^3} = 5{,}24\ y$$

TERZA LEGGE DI KEPLERO:

1. Calcolare il semiasse maggiore dell'orbita di Giove, in kilometri, sapendo che il suo periodo di rivoluzione è $T_G = 374{,}11 \cdot 10^6\ s$

   Soluzione:

   $$T_G(anni) = \frac{T_G(secondi)}{(secondi\ in\ un\ anno)} = \frac{374{,}11 \cdot 10^6\ s}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot \frac{s}{anno}} = 11{,}863\ anni$$

   Impostando la terza legge di Keplero e imponendo che $K = \frac{1\ anno^2}{1\ U.A.^3}$

   $$\frac{T^2}{a^3} = K \quad => a_G(U.A.) = \sqrt[3]{[T_G(anni)]^2} = \sqrt[3]{(11{,}863\ anni)^2} = 5{,}2\ U.A. =$$
   $$= 777{,}92 \cdot 10^6\ km$$

2. Calcolare il periodo di rivoluzione di Marte, in giorni, sapendo che il suo semiasse maggiore misura $a_M = 227{,}9 \cdot 10^9\ m$.

   Soluzione:

   $$a_M(U.A.) = \frac{a_M(m)}{149{,}6 \cdot 10^9 \cdot \frac{m}{U.A.}} = \frac{227{,}9 \cdot 10^9\ m}{149{,}6 \cdot 10^9 \cdot \frac{m}{U.A.}} = 1{,}52\ U.A.$$

   Impostando la terza legge di Keplero e imponendo che $K = \frac{1\ anno^2}{1\ U.A.^3}$

   $$\frac{T^2}{a^3} = K \quad => T_M(anni) = \sqrt{[a_M(U.A.)]^3} = \sqrt{(1{,}52\ U.A.)^3} = 1{,}87\ anni = 684\ giorni$$

3. Approssimando l'orbita di Venere a una circonferenza, calcolare la velocità media *v* del pianeta intorno al Sole sapendo che il suo periodo di rivoluzione è $T_V = 19{,}41 \cdot 10^6\ s$.

   Soluzione:

   $$T_V(anni) = \frac{T_V(secondi)}{(secondi\ in\ un\ anno)} = \frac{19{,}41 \cdot 10^6\ s}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot \frac{s}{anno}} = 0{,}61\ anni$$

Impostando la terza legge di Keplero e imponendo che $K = \frac{1\ anno^2}{1\ U.A.^3}$

$\frac{T^2}{a^3} = K$ => $a_V(U.A.) = \sqrt[3]{[T_V(anni)]^2} = \sqrt[3]{(0.61\ anni)^2} = 0,72\ U.A. = 107,6 \cdot 10^6\ km$

$$v = \frac{2\pi a_V}{T_V} = \frac{2\pi \cdot 107,6 \cdot 10^6\ km}{19,41 \cdot 10^6\ s} = 34,83\ \frac{km}{s}$$

Risoluzione del sistema per il calcolo delle velocità su orbite non circolari

$$\begin{cases} v_a d_a = v_p d_p \\ \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GmM}{d_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GmM}{d_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{\frac{1}{2} \cancel{m} v_p^2 d_p^2}{d_a^2} - \frac{G\cancel{m}M}{d_a} = \frac{1}{2} \cancel{m} v_p^2 - \frac{G\cancel{m}M}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{\frac{1}{2} v_p^2 d_p^2}{d_a^2} - \frac{1}{2} v_p^2 = \frac{GM}{d_a} - \frac{GM}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} v_p^2 \left(\frac{d_p^2}{d_a^2} - 1 \right) = GM \left(\frac{1}{d_a} - \frac{1}{d_p} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} v_p^2 \left(\frac{d_p^2 - d_a^2}{d_a^2} \right) = GM \left(\frac{d_p - d_a}{d_a d_p} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ v_p^2 = 2GM \left(\frac{d_p - d_a}{d_a d_p} \right) \left(\frac{d_a^2}{d_p^2 - d_a^2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ v_p^2 = 2GM \left(\frac{\cancel{d_p - d_a}}{\cancel{d_a} d_p} \right) \left[\frac{d_a^{\cancel{2}}}{(d_p + d_a)\cancel{(d_p - d_a)}} \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \dfrac{v_p d_p}{d_a} \\ \boldsymbol{v_p = \sqrt{2GM\dfrac{d_a}{d_p(d_p + d_a)}}} \end{cases}$$

Sostituendo la formula appena trovata nella prima equazione, si ottiene:

$$\boldsymbol{v_a = \sqrt{2GM\frac{d_p}{d_a(d_p + d_a)}}}$$

Possiamo scrivere le due velocità anche in funzione (cioè in dipendenza) del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita. Se chiamiamo il semiasse maggiore dell'orbita ellittica a, valgono le seguenti relazioni:

$$d_a = a(1 + e) \qquad\qquad d_p = a(1 - e)$$

Quindi:

$$v_p = \sqrt{2GM\frac{a(1 + e)}{a(1 - e)[a(1 - e) + a(1 + e)]}} = \sqrt{2GM\frac{1 + e}{(1 - e)[a(1 - e + 1 + e)]}}$$

$$= \sqrt{\frac{2GM}{2a}\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)}}$$

Sostituendo anche nel caso di Va:

$$v_a = \boldsymbol{\sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1 - e}{1 + e}\right)}}$$

Si ricorda inoltre che:

$$\boldsymbol{a = \frac{d_a + d_p}{2}} \qquad\qquad \boldsymbol{e = \frac{d_a - d_p}{d_a + d_p}}$$

ESERCIZIO:

Un pianeta sta cadendo sulla sua stella seguendo una traiettoria rettilinea: se si conosce l'altezza di caduta, h, si determini il tempo di caduta t.

Per risolvere questo problema si potrebbe erroneamente pensare di applicare le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato (come nel caso di una penna che cade dalla scrivania).
Consideriamo però un corpo (di massa m) che si trova a una certa altezza dal suolo: la sua forza peso equivale alla forza di attrazione gravitazionale tra il corpo e il pianeta (di raggio R e massa M) su cui si trova

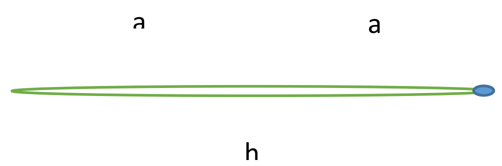
$$mg = \frac{mMG}{(R+h)^2} \quad \text{cioè} \quad g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

Come possiamo vedere, l'accelerazione di gravità g non si mantiene costante al variare dell'altezza, ma varia; noi la assumiamo costante al suolo e pari a circa 9,81 m/s^2 solo perché in quel caso Δh≈0!

Quindi non possiamo applicare le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato a questo problema! Come risolverlo allora?

All'inizio di questi appunti abbiamo evidenziato che l'eccentricità di un'ellisse indica quanto l'ellisse è "schiacciata": se dunque l'eccentricità tende a 1, la traiettoria tende a un segmento!

Quindi possiamo assumere che il pianeta cada seguendo un'orbita ellittica con eccentricità prossima a 1, e dunque semiasse maggiore a pari a h/2 (vedi figura):



Se conosciamo la massa M della stella, possiamo applicare la III legge di Keplero generalizzata:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \to T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3} \quad \to \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}\left(\frac{h}{2}\right)^3} \quad \to \quad T = \sqrt{\frac{\pi^2}{2GM}h^3}$$

Naturalmente questo è il periodo completo dell'orbita. Il periodo di caduta è la metà:

$$t = \frac{T}{2}$$

Problemi

1. Coordinate celesti e tempo

Ci troviamo in un luogo di latitudine $\varphi = 42° \, 30'15'' \, N$ e longitudine $\lambda = 15° \, 28'18''E$. Osserviamo una stella, di ascensione retta 5h 32 min 3 sec e declinazione -00° 15' 20", che passa al meridiano alle 20:30 del 14/01/2020. A quale altezza culminava? Quale era la sua distanza zenitale? In quale data, dallo stesso luogo e allo stesso orario, si è potuto vederla sorgere ad est?

Soluzione:

L'altezza massima di una stella (quando culmina) è data dalla relazione:

$$h = 90° - \varphi + \delta$$

Quindi:

$$h = 90° - 42°30'15" \; - 0° \, 15' \, 20" = 47° \, 14' \, 25"$$

La distanza zenitale è invece data da: $z = 90° - \varphi = 90° - 47° \, 14'25'' = 42° \, 45'35''$

Un dato importante per poter rispondere alla terza richiesta è sapere che le stelle "anticipano" il loro sorgere di 3 min 56 $sec/giorno$

Quindi per sapere quanti giorni prima la stella sorgeva ad est (m):

$$m = \frac{\alpha}{\Delta t} = \frac{\left(5^{h} 32^{\min} 3^{\sec}\right)}{3^{min} \; 56^{\sec}/giorno} = 84 \; giorni$$

84 giorni prima del 14/01/2020 era il 21/10/2019.

2. Coordinate e tempo

Il tempo siderale di un luogo ($\varphi = 28° \, 30'45''S$; $\lambda = 90° \, 23'50''W$) è di 9h 3min 45sec. Quale è il tempo siderale di GW?

Soluzione: Il primo passaggio da fare è trasformare la longitudine del luogo da gradi in ore. Quindi:

$$15°: 1h = 90° \, 23'50'': \lambda$$

$$\lambda = 90° \, 23'50'' \cdot \frac{1h}{15°} = 6h \; 1 \min 35.33sec$$

Il tempo siderale del luogo è legato a quello di GW dalla seguente relazione:

$$Ts = TGw + \lambda$$

Quindi: $TGw = Ts - \lambda = 9h3 \min 45sec - (-\, 6h1 \min 35.33\text{sec}\,) = 9h3 \min 45sec +$
$6h1 \min 35.33\text{sec} \; = 15h \; 5\text{min} \;\; 20sec$

PROBLEMI E QUESITI SULLA MISURA DEL TEMPO

Problema 1: In un dato luogo, a che ora di tempo siderale culmina il Sole medio in un dato giorno, sapendo che sedici giorni prima esso culminava alle 15h 12m 48s di tempo siderale?
Se ci troviamo a Belo Horizonte (longitudine λ=43°56'16" W) al mezzogiorno vero e l'equazione del tempo per quel giorno è pari a ET=-8m7s, che ora segna l'orologio dell'osservatore?

Soluzione problema 1: La prima richiesta del problema si risolve tenendo conto che giorno solare medio e giorno siderale hanno diversa durata: infatti il giorno siderale è più corto del giorno solare medio di circa 3m56s. Pertanto, se in un dato giorno il punto gamma e il Sole medio hanno raggiunto la culminazione nel medesimo istante, il giorno successivo il Sole medio culminerà 3m56s dopo il punto gamma. Quindi il Sole accumulerà un ritardo pari a 16*3m56s=1h2m56s che andrà sommato all'ora siderale data dal problema: TS=15h 12m 48s + 1h 2m 56s= 16h 15m 44s.
Se a Belo Horizonte è mezzogiorno vero, vuol dire che sono le 12h di tempo solare vero. L'equazione del tempo è la differenza fra tempo solare medio e tempo solare vero, quindi:
TSM-TSV=ET ; TSM=TSV+ET=12h – 8m 7s= 11h 51m 53s; l'orologio dell'osservatore è però in accordo col tempo del meridiano centrale del fuso di Belo Horizonte, che ha longitudine 3h W, mentre Belo Horizonte ha longitudine 2h 55m 45s W: essa è quindi più avanti di 3h-2h 55m 45s=4m 15s: l'orologio segnerà quindi le ore 11h 51m 53s – 4m 15s= 11h 47m 38s.

Problema 2: A Bergamo (λ= 9° 40' 12" E) i raggi del Sole, in un dato momento, si proiettano esattamente sulla linea della meridiana di Città Alta. In quel dato giorno l'equazione del tempo è +5m 12s. se il tempo siderale a mezzanotte di quel giorno a Greenwich risultava pari a 3h 21m 20s, qual è il tempo siderale a Greenwich nell'istante del problema?

Soluzione problema 2: La longitudine di Bergamo, espressa in ore, minuti e secondi è 38m 41s E. Se il disco luminoso si proietta sulla linea meridiana, è mezzogiorno vero; quindi il tempo solare medio sarà pari a: TSM= TSV + ET= 12h + 5m 12s= 12h 5m 12s. Greenwich si trova 38m 41s a ovest di Bergamo, quindi è anche 38m 41s *indietro*: a Greenwich sono quindi le 12h 5m 12s – 38m 41s= 11h 26m 31s. Sono passate quindi 11h 26m 31s dalla mezzanotte: per convertire questo tempo medio in tempo siderale moltiplichiamo per il fattore di conversione 366,25/365,25:
ΔTS (Greenwich)= (366,25/365,25)*(11,4419444 h)= 11,4732394h = 11h 28m 24s. Quindi a Greenwich sono le 3h 21m 20s + 11h 28m 24s= 14h 49m 44s di tempo siderale.

Quesito: Si valuti, argomentando opportunamente, come varia l'Equazione del Tempo nel corso dell'anno solare; se in un piano cartesiano in ascissa indichiamo l'ET e in ordinata la declinazione del Sole, che curva si ottiene?

Risposta: L'equazione del tempo si annulla quattro volte l'anno: a metà aprile, a metà giugno, verso Natale e ai primi di settembre: il sole medio e il sole vero culminano contemporaneamente; (1) Da Natale a metà aprile il sole medio anticipa il sole vero; (2) da metà aprile a metà giugno il sole vero anticipa il sole medio; da metà giugno a inizio settembre come (1) e da inizio settembre a Natale come (2). Oltre a "oscillare in orizzontale", in un anno il sole "oscilla in verticale", nel senso che assume declinazioni da 23°27’ a -23°27’. La curva che si ottiene è quindi una sorta di “8” chiamata *analemma*: essa è anche la curva che è formata dalle posizioni in cielo del sole vero registrate a mezzogiorno medio locale ogni giorno dell’anno.

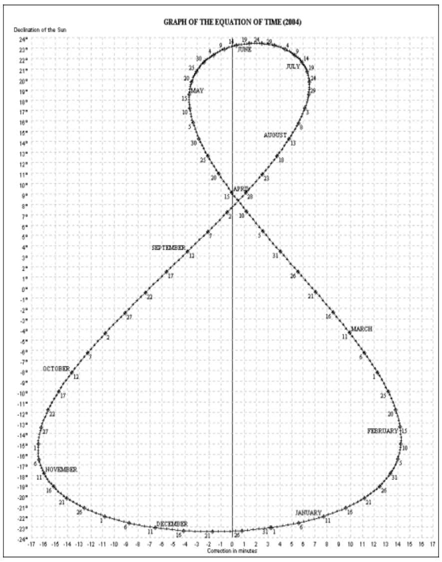


Figura 1: Analemma dec/ET

Figura 2: Analemma visualizzato nel cielo di Atene

<u>Problema 3:</u> Una stella di ascensione retta AR=11h 12m 13s culmina in un dato luogo della Terra alle ore 13h 04m 02s di tempo medio. Considerando che a Greenwich culmina una stella con ascensione retta 8h 11m 58s, dire che orario segna l’orologio dell’osservatore in quel dato luogo della Terra.

Soluzione: Il tempo siderale in un dato luogo è uguale all’ascensione retta delle stelle che si trovano a culminare al meridiano superiore. Quindi in questo luogo della Terra il tempo siderale è pari a 11h 12m 13s; a Greenwich il tempo siderale è pari a 8h 11m 58s. Notiamo come il luogo dove si trova l’osservatore ha longitudine est: infatti è più avanti di Greenwich di circa 3 ore, quindi è più a Est di Greenwich. La differenza fra l’ora siderale dell’osservatore e quella a Greenwich dà la longitudine del luogo (differenza fra longitudine del luogo e longitudine di Greenwich che è 0 perché il suo meridiano è origine delle longitudini):
λ= TS’-TS(GW)= 11h 12m 13s – 8h 11m 58s= 3h 0m 15s E. Questo luogo segue il meridiano che ha longitudine 3h E, quindi è in anticipo rispetto a esso di appena 15s: pertanto il suo orologio segnerà le ore 13h 04m 02s – 15s= 13h 03m 47s.