OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2020

Gara Interregionale - 14 febbraio

Categoria Junior 2

1. Giove e l'Orsa Maggiore
Quanto tempo impiega Giove, nel suo moto apparente tra le stelle, per attraversare da una parte all'altra la costellazione dell'Orsa Maggiore? Trascurate l'inclinazione dell'orbita del pianeta sull'eclittica.

Soluzione
Giove non si può mai trovare nella costellazione dell'Orsa Maggiore perché l'Orsa Maggiore non è attraversata dall'eclittica.

2. Velocità radiale eliocentrica
Gli astrofisici misurano le velocità radiali delle stelle, ottenute dall'effetto Doppler, utilizzando come riferimento il centro del Sole (velocità radiali eliocentriche). Ciò perché quando si ottiene una velocità radiale a partire dallo spostamento $\Delta\lambda$ di una riga sullo spettro di una stella ($v_{radiale} = \frac{c \cdot \Delta\lambda}{\lambda}$), parte di questo spostamento è in realtà dovuto al moto della Terra lungo la sua orbita attorno al Sole e va quindi considerato.
Quale è il valore massimo dello spostamento Doppler $\Delta\lambda$ dovuto al moto orbitale della Terra per la riga spettrale Hα? Considerate circolare l'orbita della Terra attorno al Sole.

Soluzione
Il valore massimo dello spostamento Doppler $\Delta\lambda$ si ha osservando una stella sull'eclittica in direzione del moto orbitale della Terra. La velocità della Terra può essere verso la stella, o in verso opposto. Considerando l'orbita circolare e detto **T** il periodo di rivoluzione, la velocità orbitale della Terra in valore assoluto è:

$$v_{Terra} = \frac{2\pi \cdot a}{T} \cong \frac{2\pi \cdot 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}}{3.1558 \cdot 10^7 \text{ s}} \simeq 29.79 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Quindi per la riga Hα:

$$\Delta\lambda = \frac{v_{Terra} \cdot \lambda}{c} \simeq \frac{29.79 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 6562.8 \text{ Å}}{299792 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \simeq 0.6521 \text{ Å}$$

3. Orientarsi con il Sole
Un gruppo di giovani olimpionici parte il 21 giugno da una località in Italia per un campeggio. A un certo punto del percorso decidono di ricavare le coordinate del luogo utilizzando un'asta di legno e un orologio. Piantata l'asta, verificano che la parte al di sopra il suolo è lunga esattamente due metri e attendono che l'ombra da essa proiettata sia minima. Questo avviene alle 13:10:30 locali (tempo del fuso di Roma con ora legale) con l'ombra lunga 0.716 m. Quali sono le coordinate del luogo in cui si trovano? Si trascurino gli effetti dovuti all'equazione del tempo.

Soluzione
Per il calcolo della latitudine i ragazzi devono conoscere l'altezza del Sole sull'orizzonte al momento in cui effettuano la misura. Dalle lunghezze dell'asta $\mathbf{l_{asta}}$ e dell'ombra $\mathbf{l_{ombra}}$ possono risalire all'angolo $\boldsymbol{\alpha}$ che esprime l'altezza del Sole:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{l_{asta}}{l_{ombra}} \simeq \tan^{-1} \frac{2 \text{ m}}{0.716 \text{ m}} \simeq \tan^{-1} 2.79 \simeq 70°.3 \simeq 70° 18'$$

Poiché la misura viene effettuata al passaggio del Sole al meridiano del luogo (ombra minima = altezza massima del Sole) e la data (21 giugno) ci dice che la declinazione del Sole è $\delta_{Sole} \simeq 23° 26'$, detta φ la latitudine vale la relazione: $h_{massima} = 90° - \varphi + \delta$, da cui si ricava:

$$\varphi = 90° - h_{massima} + \delta \simeq 43° 8'$$

Per determinare la longitudine λ, trascurando l'equazione del tempo, si può semplicemente confrontare l'ora del passaggio del Sole al meridiano locale con quella al meridiano di Greenwich. La differenza di tempo in cui viene osservato il fenomeno nelle due località, convertita in gradi, corrisponde alla differenza di longitudine. Le 13:10:30 locali, tenendo conto dell'ora legale e che il tempo del fuso di Roma è UT + 1, corrispondono alle 11:10:30 UT. A Greenwich il Sole passa al meridiano alle 12:00 UT, quindi essendo la differenza di tempo $\Delta t = 49.5$ minuti, avremo:

$$\Delta\lambda \simeq \frac{15° \cdot 49.5 \text{ m}}{60 \text{ m}} \simeq 12° 23'$$

Poiché la località di osservazione si trova a est di Greenwich le coordinate geografiche in cui si trovano i ragazzi sono:

$$\varphi \simeq +43° 8', \quad \lambda \simeq 12° 23'$$

I ragazzi si trovano nei pressi di Perugia.

4. Minacce stellari

Il terribile Darth Vader di Star Wars ha una nuova micidiale arma, un acceleratore di pianeti, con la quale minaccia i ribelli della Resistenza. Darth Vader punta la sua arma contro il pianeta Terra, aumentando la velocità di rotazione del pianeta all'equatore di 329 km/h.

1. Con la nuova velocità di rotazione, supponendo la Terra sferica con raggio invariato, quante ore durerà il nuovo giorno siderale?
2. Se la Terra mantiene questa velocità di rotazione su sé stessa per un'intera orbita intorno al Sole, e trascurando la precessione, da quanti giorni solari sarà composto un anno?

Soluzione

Detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra e $\mathbf{T}$ il periodo di rotazione siderale, la velocità lineare di un punto che si trova sull'equatore, a seguito alla rotazione, è data da: $V_{eq} = \frac{2\pi \cdot R_T}{T}$.

Attualmente un punto sull'equatore della Terra si muove con velocità:

$$V_{eq} = \frac{2\pi \cdot R_T}{T} \simeq \frac{2\pi \cdot 6378 \text{ km}}{23.934 \text{ h}} \simeq 1674 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Se l'acceleratore di pianeti aumenta la velocità di 329 km/h, la nuova velocità lineare di un punto all'equatore sarà:

$$V_{acc} \simeq V_{eq} + 329 \frac{\text{km}}{\text{h}} \simeq 2003 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Con questa velocità si ottiene il nuovo periodo di rotazione siderale:

$$T_{acc} = \frac{2\pi \cdot R_T}{V_{acc}} \simeq \frac{2\pi \cdot 6378 \text{ km}}{2003 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \simeq 20.01 \text{ h}$$

Trascurando la precessione degli equinozi, il tempo $\mathbf{P}$ impiegato dalla Terra per completare una rivoluzione attorno al Sole si può ottenere dal giorno solare medio "originale" e vale:

$$P \simeq 365.26 \cdot 24 \text{ h} \simeq 8766.2 \text{ h}$$

Quindi il nuovo numero di giorni siderali $\mathbf{N}$ in un anno sarà dato da:

$$N = \frac{P}{T_{acc}} \simeq \frac{8766.2 \text{ h}}{20.01 \frac{\text{h}}{\text{g}}} \simeq 438.1 \text{ g}$$

Dopo una rivoluzione completa attorno al Sole il numero di giorni siderali **N** è pari al numero di giorni solari medi **K** aumentato di uno, la durata in giorni solari medi nel nuovo anno è quindi:

$$K = N - 1 \simeq 437.1 \text{ g}$$

5. Un nuovo sistema planetario

È stato recentemente scoperto un sistema planetario formato da una stella con densità media pari alla densità media del Sole e raggio pari al doppio di quello del Sole, attorno alla quale orbitano due pianeti. Le orbite dei due pianeti sono circolari e giacciono sullo stesso piano, le loro masse sono trascurabili rispetto a quella della stella. Il pianeta più interno, chiamato Vulcano, ha una velocità orbitale di 60.0 km/s. Visto da Vulcano, il pianeta più esterno, chiamato Gaia, ha un periodo sinodico di 883 giorni terrestri. Calcolate:

1. la distanza dalla stella e il periodo orbitale di Vulcano;
2. la distanza dalla stella e il periodo orbitale di Gaia;
3. l'angolo di elongazione massima di Vulcano rispetto alla stella se osservato da Gaia.

Soluzione

1. Detti $\mathbf{M_S}$ la massa della stella, $\mathbf{R_S}$ il suo raggio e $\boldsymbol{\varrho}$ la sua densità media, avremo: $M_s = \rho\, V = \rho\, \frac{4}{3} \pi\, R_S^3$. Consideriamo il rapporto tra la massa della stella e quella del Sole $\mathbf{M_{sole}}$: poiché le densità dei due corpi sono uguali avremo:

$$M_s = M_{sole} \left(\frac{R_s}{R_{sole}}\right)^3 = M_{sole} \left(\frac{2\, R_{sole}}{R_{sole}}\right)^3 = 8\, M_{sole} \simeq 8 \cdot 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \simeq 1.591 \cdot 10^{31} \text{ kg}$$

Per un'orbita circolare percorsa con velocità **v** vale la relazione: $v = \sqrt{\frac{G\, M_s}{a}}$, con **a** raggio dell'orbita, da cui otteniamo:

$$a_{Vulcano} = \frac{G \cdot M_s}{v_{vulcano}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.591 \cdot 10^{31} kg}{36.0 \cdot 10^8 \frac{m^2}{s^2}} \simeq 2.95 \cdot 10^{11} \text{ m} \simeq 2.95 \cdot 10^{8} \text{ km}$$

Il periodo di rivoluzione di Vulcano si può ricavare dalla III Legge di Keplero, o a partire dalla sua velocità orbitale:

$$T_{Vulcano} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot a_{vulcano}^3}{G \cdot M_s}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 2.57 \cdot 10^{34}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.591 \cdot 10^{31}\, kg}} \simeq \sqrt{9.55 \cdot 10^{14}\, s^2} \simeq 30.9 \cdot 10^6 \text{ s}$$
$$\simeq 8580 \text{ h} \simeq 358 \text{ g}$$

$$T_{Vulcano} = \frac{2\pi \cdot a_{vulcano}}{v_{vulcano}} \simeq \frac{2\pi \cdot 2.95 \cdot 10^{11} \text{ m}}{60.0 \cdot 10^3 \frac{m}{s}} \simeq 30.9 \cdot 10^6 \text{ s} \simeq 8580 \text{ h} \simeq 358 \text{ g}$$

2. Il periodo di rivoluzione di Gaia, $\mathbf{T_{Gaia}}$, si può ricavare a partire dal periodo orbitale di Vulcano $\mathbf{T_{Vulcano}}$ e dal periodo sinodico di Gaia, $\mathbf{S_{GV}}$, osservato da Vulcano. Le tre quantità sono legate dalla relazione:

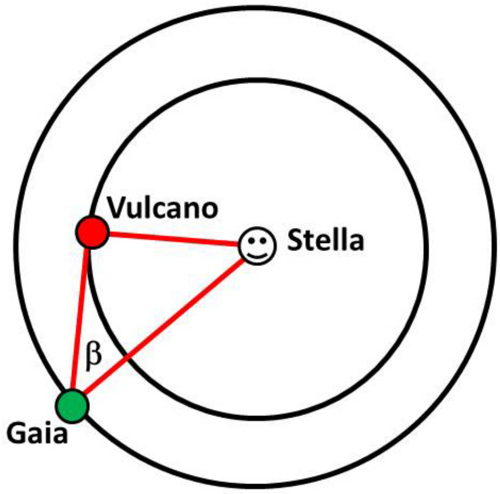
$$\frac{1}{S_{GV}} = \frac{1}{T_{Vulcano}} - \frac{1}{T_{Gaia}} \quad \text{da cui si ricava} \quad \frac{1}{T_{Gaia}} = \frac{1}{T_{Vulcano}} - \frac{1}{S_{GV}}$$

$$\frac{1}{T_{Gaia}} = \frac{1}{358 \text{ g}} - \frac{1}{883 \text{ g}} \simeq 1.66 \cdot 10^{-3} \frac{1}{g} \quad \text{da cui} \quad T_{Gaia} \simeq 602 \text{ g}$$

Noto il periodo di rivoluzione di Gaia possiamo ricavare il raggio della sua orbita dalla III legge di Keplero:

$$a_{Gaia} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_s \cdot {T_{Gaia}}^2}{4\pi^2}} \backsimeq \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.591 \cdot 10^{31} kg \cdot 2.71 \cdot 10^{15}\, s^2}{39.48}} \backsimeq 4.18 \cdot 10^{11}\ m$$
$$= 4.18 \cdot 10^{8}\ km$$

3.



Poiché alla massima elongazione la stella e i due pianeti si trovano ai vertici di un triangolo rettangolo (come mostrato nella figura a sinistra), l'angolo Stella-Gaia-Vulcano **β** sarà dato dalla relazione:

$$\beta = \sin^{-1} \frac{a_{Vulcano}}{a_{Gaia}} \backsimeq \sin^{-1} \frac{2.95 \cdot 10^{8}\ km}{4.18 \cdot 10^{8}\ km} \backsimeq 44°\, 53'$$